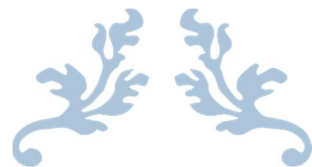
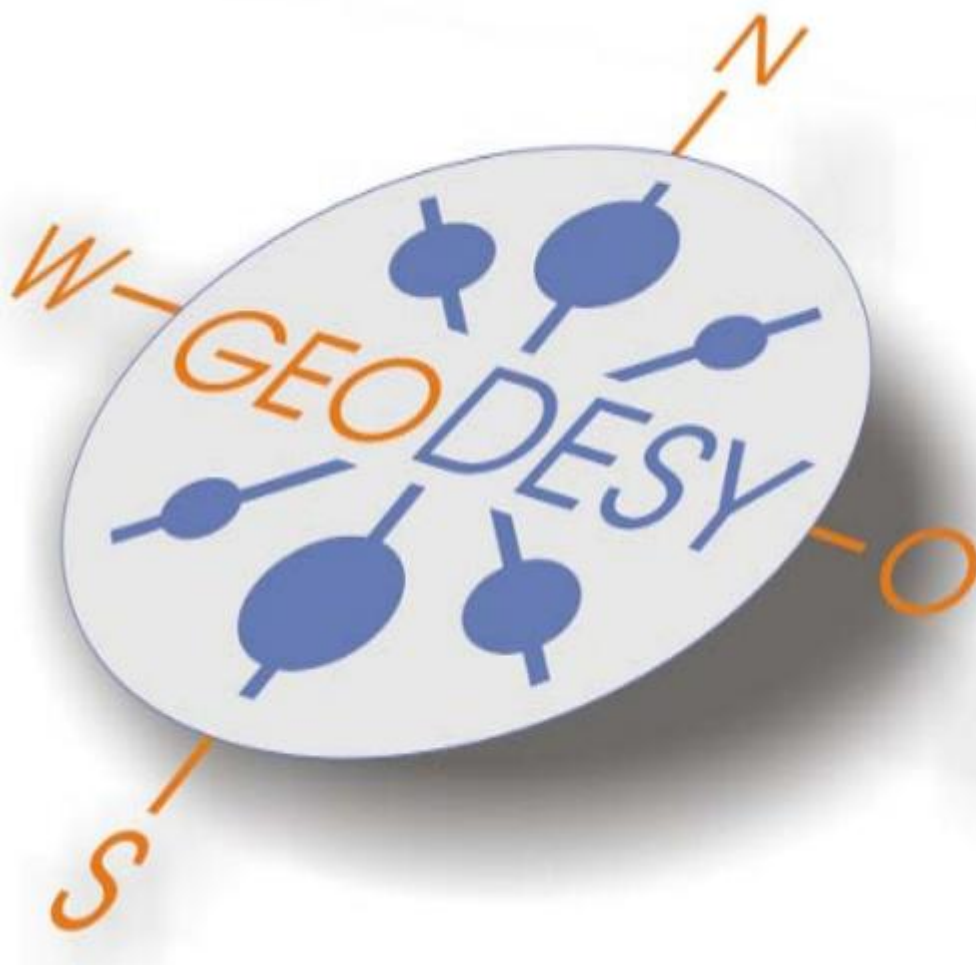


به نام خداوند جان و خرد کرین برتراندیشه برگدزد



جزوه درس ژئودزی و محاسبات

استاد محمد کریم



ژئودزی II یکی از دروس مهم نقشه برداری است که مباحث کلیدی مربوط به سیستم های تصویر و روابط طراحی و استفاده از آنها را شرح می دهد. بر خلاف بعضی از دروس که سر فصل آن بسته به استاد تفاوت زیادی دارند، این درس تقریباً در اغلب دانشگاه ها با سر فصلی مشابه تدریس می شود. بهترین منبع این درس که هم برای آموزش کلاسی و هم به عنوان منبع آزمون کارشناسی ارشد مفید می باشد، جزوه مهندس محمد کریم می باشد که در واقع ترجمه بخشهایی از کتاب Geodesy The Concept می باشد.

در ادامه سر فصل مطالب موجود در این جزوه آورده شده است:

بخش اول: سیستم های مختصات ژئودزی

۱- مقدمه

۱-۱- قطب ها، صفحات و محور ها (Terrestrial Topocentric, Terrestrial Geocentric Systems)
Systems، سیستم های دست چپی، سیستم اگلیپتیک سماوی، سیستم بعدی سماوی، سیستم زاویه ساعتی، سیستم افقی، سیستم مداری)

۲- ۱- زمان جهانی زمان نجومی

۳- ۱- انواع مشاهدات در ژئودزی

۲- سیستم های مختصات زمینی

۱- ۲- سیستم های زمینی Geocentric

۱- ۲- ۱- حرکات قطبی و دوران نامنظم زمین

۲- ۱- ۲- سیستم های متوسط و لحظه ای

۳- ۱- ۲- سیستم های ژئودتیک

۲- ۲- رابطه بین مختصات کارتزین و منحنی الخط

۱- ۲- ۲- مختصات کارتزین و منحنی الخط یک نقطه روی بیضوی مقایسه

۲- ۲- ۲- بردار وضعیت بر حسب عرض ژئودتیک

۳- ۲- ۲- تبدیل از مختصات کارتزین زمینی متوسط به مختصات ژئودتیک

۳- ۲- سطوح مختصات ژئودتیک

۱- ۳- ۲- پارامترهای مشخص کننده وضعیت سطح مختصات

تهیه و تنظیم: حمید جعفرزاده
۳- ۲- ۱- دیتوم
۳- ۲- ۲- دیتوم
۳- ۲- ۳- دیتوم

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

۲-۴-

۲-۴-۱- سیستم های زمینی Topocentric

۲-۴-۲- سیستم نجومی محلی

۲-۴-۳- سیستم های ژئودتیک محلی

۲-۵- خلاصه سیستم های زمینی

بخش دوم: محاسبات تعیین مختصات

قسمت اول: هندسه بیضوی

۱- بیضوی دورانی

۱-۱- پارامترهای بیضوی

۱-۲- شعاع انحناء

۱-۲-۱- شعاع انحناء نصف النهار

۱-۲-۲- شعاع انحناء اولیه

۱-۲-۳- شعاع انحناء در یک آزیموت اختیاری

۱-۳- منحنی های واقع بر سطح یک بیضوی

۱-۳-۱- مقطع قائم

۱-۳-۲- ژئودزیک

قسمت دوم: تبدیل مشاهدات ژئودزیک زمینی به سطح بیضوی مقایسه

۲-

۲-۱- تبدیل امتداد ها و یا زوایای افقی

۲-۱-۱- تصحیح به علت تنافر قائم ها

۲-۱-۲- اثرات فیزیکی

۲-۲- فواصل سمت الراسی

۳- تفهیل اصل
حمید محقرزاده

۴- تبدیل کمیت های محاسبه شده ژئودتیک به اندازه های زمینی

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

hamid73j@ymail.com

قسمت سوم: محاسبات مختصات ژئودتیک بر روی بیضوی مقایسه

۳- فرمول پواسن - خطوط کوتاه

۳-۱- مقدمه

۳-۲- مسئله مستقیم

۳-۳- مسئله معکوس

۳-۴- خلاصه معادلات مربوطه به حل مسائل مستقیم و معکوس با به کار بردن فرمولهای پواسن

۳-۵- فرمولهای گوس برای عرض های متوسط

۳-۶- دیگر فرمولهای خطوط کوتاه

بخش سوم سیستم تصویر متشابه

کلیات

۱- مقدمه ای بر تصاویر متشابه

۲- مروری بر متغیر های متغیر

۲-۱- قوانین حساب مختلط

۲-۲- صفحه مختلط

۲-۳- توابع مختلط

۲-۴- شرط تشابه بر روی دو صفحه مختلط، شروط کوشی و ریمان

۲-۵- توابع مختلط خاص

۳- مروری بر هندسه دیفرانسیل

۳-۱- معادلات پارامتریک رویه

۳-۲- کمیت های اصلی گوس

۳-۳- زاویه بین منحنی های پارامتریک

۴- تصاویر متشابه بطور کلی

۴-۱- صفحه Isometric

۴-۲- تمپیه و تنظیم و تعریف چسبندگی اشل

۴-۳- شروع از تشابه بین صفحه نقشه و صفحه ایزومتریک

hamid73j@ymail.com

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

۴-۴- تعیین ضریب اشل

۴-۵- روابط هندسی منحنی های تصویر شده

۴-۶- تقارب نصف النهارات

۵- تصویر مرکاتور

۵-۱- مسئله مستقیم

۵-۲- ضریب اشل

۵-۳- تقارب نصف النهارات

۵-۴- شکل تصویر مرکاتور

۵-۵- لوکسدروم loxodrome

۵-۶- مسئله معکوس

۶- تصویر ترانسورس مرکاتور

۶-۱- مسئله مستقیم

۶-۲- تقارب نصف النهارات بر حسب مختصات ژئودتیک

۶-۳- ضریب اشل بر حسب مختصات ژئودتیک

۶-۴- شکل ظاهری تصویر ترانسورس مرکاتور

۶-۵- مسئله معکوس

۶-۶- تقارب نصف النهارات بر حسب مختصات نقشه

۶-۷- ضریب اشل بر حسب مختصات نقشه

۶-۸- سیستم ترانسورس مرکاتور جهانی

۶-۸-۱- ضریب اشل در UTM

۶-۸-۲- معادلات تصویر در UTM

۷- تصویر متشابه مخروطی لامبرت

۷-۱- مسئله مستقیم

۷-۲- تهیه ضریب اشل
مستقیم:

۷-۳- ضریب تقارب نصف النهارات
ممید مجفرازاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

۷-۴- LCC در حالت دو مدار استاندارد

۷-۵- LCC در حالت یک مدار استاندارد

۷-۶- ترمیم و تغییر سیستم مختصات

۷-۷- مسئله معکوس

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

hamid73j@ymail.com

بخش اول: سیستم های مختصات در ژئودزی

(۱) مقدمه

این بخش شامل تعاریف دقیق سیستم های مختصات و تبدیلات آنها به یکدیگر می باشد. هدف از انتخاب سیستم مختصات تعیین مختصات نقاط واقع بر سطح زمین یا بالای آن نسبت به آن سیستم می باشد. یک سیستم مختصات بایستی دارای مشخصات زیر باشد:

۱- محل مبدأ

۲- جهت توجیه سه محور

۳- پارامترهایی که وضعیت یک را نسبت به سیستم های مختصات تعریف می کنند (کارتزین یا منحنی الخط)

حرکات دوره های زمین در فضا از اهمیت خاصی در رابطه با تعریف سیستم های مختصات و سیستم های زمان برخوردار هستند بطوریکه می دانیم زمین دارای دو نوع حرکت است: اول حرکت زمین به دور خود و دوم گردش آن به دور خورشید (شکل ۱-۱) و همچنین دارای یک قمر طبیعی (ماه) و تعداد زیادی اقمار مصنوعی می باشد که سومین حرکت دوره ای را در فضا ایجاد می کنند که آن را حرکت مسیری^۱ به دور زمین گویند. از انواع سیستم های مختصات، سیستم های نامبرده زیر مورد توجه است:

- سیستم های مختصات زمینی^۲: سیستم هایی هستند که به زمین بسته اند^۳. منظور از بستگی به زمین این است که با زمین دوران می کنند. این سیستم ها برای تعیین مختصات نقاط واقع بر سطح زمین بکار می روند و به دو دسته تقسیم می شوند: یکی سیستم هایی که مبدأ مرکز زمین^۴ و دیگری سیستم هایی مبدأ آنها واقع بر سطح زمین^۵ است (شکل ۱-۲).
- سیستم های مختصات سماوی^۶: سیستم هایی هستند که در حرکت زمین به دور خورشید شرکت نداشته ولی ممکن است با زمین دوران نمایند. این سیستم ها در تعیین مختصات اجرام سماوی مانند ستارگان مورد استفاده قرار می گیرند و به چهار دسته مختلف تقسیم می شوند:

۱- سیستم مختصات اقلیتیک^۷

۲- سیستم مختصات بعدی^۸

۳- سیستم مختصات زاویه ساعتی^۹

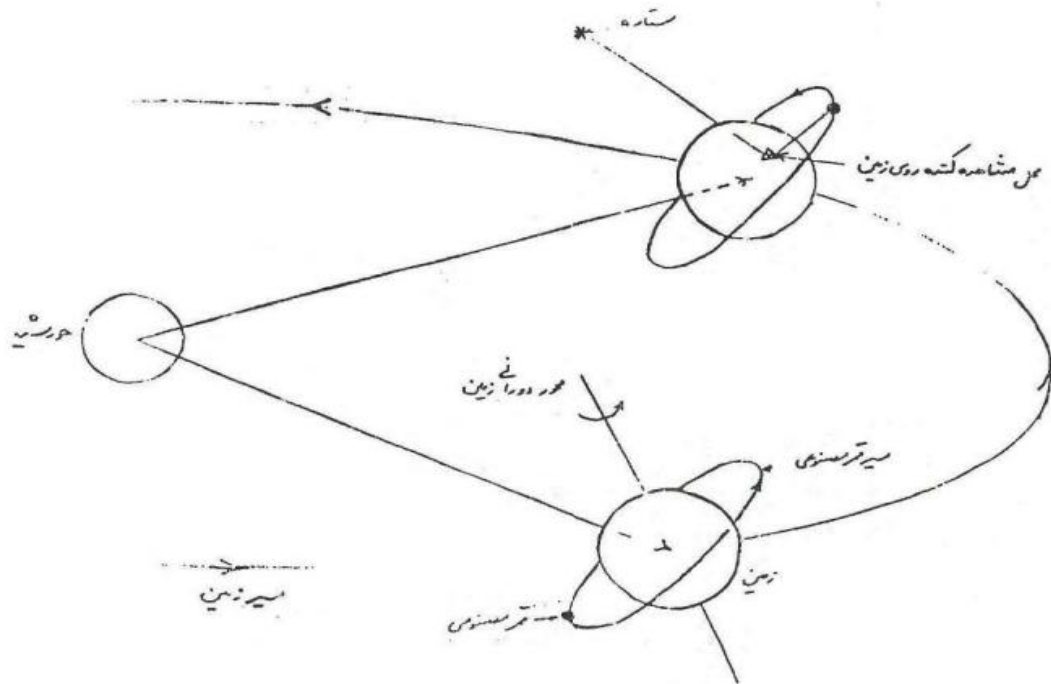
۴- سیستم مختصات افقی^{۱۰}

- سیستم های مختصات مسیری^{۱۱}: سیستم هایی هستند که با زمین دوران نمی کنند ولی در حرکت زمین به دور خورشید شرکت داشته و برای تعریف و تعیین مختصات اقمار مصنوعی زمین به کار می روند.

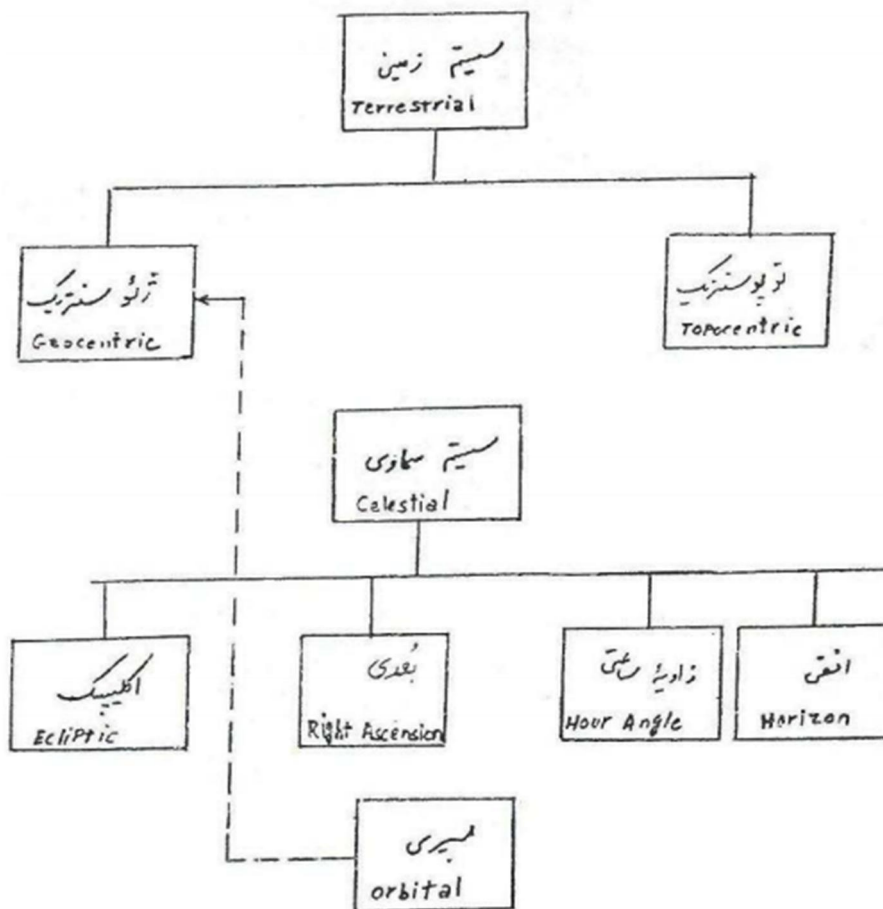
- Orbital motion^۱
- Terrestrial Coordinate Systems^۲
- Earth fixed^۳
- geocentric^۴
- Topocentric^۵
- Celestial Coordinate Systems^۶
- Ecliptic^۷
- Right ascension^۸
- Hour angle^۹
- Horizon^{۱۰}
- Orbital coordinate systems^{۱۱}

جهت توجیه و تفسیر:

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز



شکل ۱-۱



شکل ۱-۲ (جدول سیستم های مختصات)

توجیه محورهای مختصات را می توان بر حسب قطب های اولیه و ثانویه، صفحات اولیه و ثانویه و محورهای اول و دوم و سوم در نظر گرفت:

- ✓ قطب اولیه، محور تقارن سیستم مختصات است. بعنوان مثال: محور دوران زمین
- ✓ صفحه اولیه، صفحه عمود بر قطب اولیه است. مثلاً: صفحه استوای زمین
- ✓ صفحه ثانویه، عمود بر صفحه اولیه و گذرنده بر قطب اولیه می باشد که گاهی بطور اختیاری انتخاب می شود مانند صفحه نصف النهار گرینویچ و گاهی از عوامل طبیعی در تعریف آنها استفاده می شود مانند صفحه ثانویه گذرنده بر نقطه γ (محل برخورد دایره اقلیتیک و دایره استوا).
- ✓ قطب ثانویه، محل تقاطع صفحات اولیه و ثانویه است.
- ✓ محور اول، قطب ثانویه و محور سوم، قطب اولیه و محور دوم ، عمود بر دو محور دیگر می باشد و انتخاب آن در جهتی است که بر حسب خواست ما سیستم دست راستی^{۱۲} یا دست چپی^{۱۳} را بوجود آورد.

برای توجیه سیستم های مختصات با آنچه در بالا ذکر شد صفحه اولیه، محور اول و قطب را در آنها مورد بررسی قرار می دهیم:

- برای سیستم هایی که مبدأ آنها مرکز زمین است^{۱۴} عوامل فوق بصورت زیر تعریف می شوند:
 - الف- مبدأ مختصات نزدیک مرکز زمین است.
 - ب- قطب اولیه در امتداد محور دورانی زمین و صفحه اولیه عمود این قطب و صفحه استوا نامیده می شود.
 - ج- محور اول تقاطع بین صفحه استوا و صفحه گذرنده بر نصف النهار گرینویچ است.
 - د- سیستم دست راستی است
- برای سیستم های مختصات زمینی که مبدأ آنها نقطه ای واقع بر سطح زمین است^{۱۵} عوامل فوق بصورت زیر تعریف می شود:
 - الف- مبدأ مختصات نقطه ای است نزدیک سطح زمین
 - ب- صفحه اولیه صفحه ای است مماس بر سطح زمین در نقطه مبدأ
 - ج- محور اولیه نقطه شمال است (این نقطه محل تقاطع صفحه مماس و صفحه گذرنده بر قطب شمال دورانی زمین است)
 - د- سیستم دست چپی است
- برای سیستم سماوی اقلیتیک چهار عامل فوق بصورت زیر تعریف می شوند:
 - الف- مبدأ نقطه ای است نزدیک مرکز خورشید
 - ب- صفحه اولیه صفحه مسیر حرکت زمین به دور خورشید است که صفحه اقلیتیک نامیده می شود
 - ج- محور تقاطع بین صفحه اقلیتیک و صفحه استوا است (نقطه γ) که vernal equinox نامیده می شود.
 - د- سیستم دست راستی است
- برای سیستم سماوی بعدی عوامل فوق بصورت زیر تعریف می شوند:

Right handed^{۱۲}
Left handed^{۱۳}
Terrestrial geocentric system^{۱۴}
Terrestrial topocentric system^{۱۵}

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

- الف- مبدأ مختصات نزدیک مرکز خورشید است
 ب- صفحه اولیه صفحه استوا است
 ج- محور اول نقطه گاما (vernal equinox) است
 د- سیستم دست راستی است
- برای سیستم زاویه ساعتی بصورت زیر تعریف می شوند:
- الف- مبدأ مختصات نزدیک مرکز خورشید است
 ب- صفحه اولیه صفحه استوا است
 ج- صفحه ثانویه صفحه نصف النهار سماوی است (صفحه نصف النهار سماوی صفحه ای است گذرنده بر ناظر و محور دورانی زمین)
 د- سیستم دست چپی است
- در مورد سیستم افقی نیز خواهیم داشت:
- الف- مبدأ مختصات نزدیک مرکز خورشید است
 ب- صفحه اولیه به موازات صفحه مماس در محل مشاهده کننده است (صفحه افق)
 ج- محور اولیه به موازات نقطه شمال ناظر می باشد
 د- سیستم دست چپی است
- و در مورد سیستم مسیری:
- الف- مبدأ مختصات مرکز ثقل زمین است
 ب- صفحه اولیه صفحه سیر قمر به دور زمین می باشد
 ج- محور اول خطی در صفحه اولیه و جهت آن به طرف نقطه پری جی^{۱۶} است (این نقطه، نقطه ایست که قمر مصنوعی در نزدیکترین فاصله از زمین واقع می شود). خط مزبور خط اپسیدس^{۱۷} نامیده می شود.
 د- سیستم دست راستی است
- ۱-۲- زمان جهانی و زمان نجومی

با حرکات دوره ای دورانی و انتقالی زمین دو سیستم زمانی جهانی یا خورشیدی (UT) و نجومی (ST) نیز تعریف می شوند. بطور کلی یک سیستم زمانی با تعیین یک فاصله و یک مبدأ دقیق زمانی تعریف می شود. روز خورشیدی عبارت است از فاصله زمانی بین دو عبور متوالی خورشید از نصف النهار یک محل. روز نجومی فاصله دو عبور متوالی نقطه گاما از نصف النهار یک محل می باشد. مبدأ نجومی زاویه ی بین نقطه γ و یک نصف النهار زمینی است. اگر این نصف النهار گرینویچ باشد آن را زمان نجومی گرینویچ (GST) می نامند. زمان خورشیدی بوسیله یک فرمول ریاضی به زمان نجومی مربوط است. زمان نجومی پارامتری است که بوسیله آن سیستم های زمینی و نجومی باهم ارتباط می یابند.

۱-۳- انواع مشاهدات در ژئودزی

ژئودزی عبارت است از مطالعه اندازه و شکل زمین و تعیین مختصات نقاط واقع بر روی سطح زمین و بالای آن. مختصات یک ایستگاه و یک نقطه نسبت به مختصات نقاط دیگر با انجام یک یا چند مشاهده از چهار دسته مشاهده های زیر تعیین می شود:

«امتداد ها»، «فواصل»، «اختلاف فواصل» و «ارتفاعات»

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

perigee^{۱۶}
apsides^{۱۷}

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

اندازه گیری های زاویه افقی و قائم بین دو نقطه واقع بر سطح زمین که معمولاً با تئودولیت انجام می شوند امتداد های زمینی هستند. اندازه گیری های زاویه ای که بین یک ایستگاه واقع بر سطح زمین و یک موقعیت از قمر مصنوعی انجام می شود (بطور مثال طریق عکسبرداری از قمر مصنوعی در زمینه ستاره) امتداد های قمر مصنوعی هستند. مشاهدات زاویه ای که بین یک نقطه از سطح زمین و یک ستاره به عمل می آید امتداد های نجومی هستند. فواصل بین دو ایستگاه روی زمین (مانند فواصل اندازه گیری شده بوسیله دستگاه های الکتروماتیک) فواصل زمینی و فواصل اندازه گیری شده بین یک نقطه زمینی و یک موقعیت از قمر مصنوعی (بطور مثال اندازه گیری شده با laser ranging) فواصل اقماری نامیده می شوند. اختلاف اندازه گیری شده بین یک نقطه از زمین با دو ایستگاه دیگر اندازه گیری اختلاف فاصله نامیده می شوند (مانند تعیین وضعیت هیپربولیکی). اندازه گیری اختلاف فاصله بین یک ایستگاه زمینی و دو وضعیت مختلف یک قمر مصنوعی به اندازه گیری اختلاف فاصله اقماری موسوم است. تمام این اندازه گیری ها روابط هندسی بین ایستگاه ها را تعیین نموده و بخشی از ژئودزی هندسی هستند.

اختلاف ارتفاعاتی که به روش ترازبایی دقیق بدست می آیند و مقادیری که از اندازه گیری های ثقل در مسیر این خطوط ترازبایی حاصل می شوند مربوط به اختلافات پتانسیل در حوزه جاذبه زمین هستند و بخشی از فیزیکال ژئودزی را تشکیل می دهند.

رابطه بین تمام اندازه گیری های فوق و مختصات ایستگاه های شبکه های ژئودزی که با آن اندازه گیری ها تعیین می شوند توأماً و مشترکاً مدل ریاضی را تشکیل می دهند. یک حل یکه برای مختصات مجهول را می توان با اعمال روش کمترین مربعات^{۱۸} اندازه گیری و مدل ریاضی را بدست آورد.

۲) سیستم های مختصات زمینی

در این فصل سیستم های مختصات زمینی ژئوسنتریک و توپوسنتریک را مورد مطالعه قرار می دهیم. در اینجا ابتدا سیستم های توپوسنتریک را با استفاده از مختصات کارترین توضیح داده و بیان می کنیم که منظور از محور دورانی زمین و نصف النهار گرینویچ چیست. سپس رابطه بین سیستم های کارترین و منحنی الخط شرح داده خواهد شد. در آخر سیستم زمینی توپوسنتریک را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۱-۲- سیستم های زمینی ژئوسنتریک

در مقدمه توضیح داده شد که در مورد سیستم های زمینی ژئوسنتریک شرایطی بایستی برقرار باشد:

الف- مبدأ مختصات نزدیک مرکز زمین باشد

ب- قطب اولیه در امتداد محور دورانی زمین باشد

ج- محور اول عبارت است از تقاطع بین صفحه اولیه و صفحه شامل نصف النهار گرینویچ

د- سیستم دست راستی باشد

شرط «د» روشن و بدون ابهام است ولی سه شرط اولیه بطوریکه خواهیم دید چنین نیستند.

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

Least-squares estimation

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

hamid73j@ymail.com

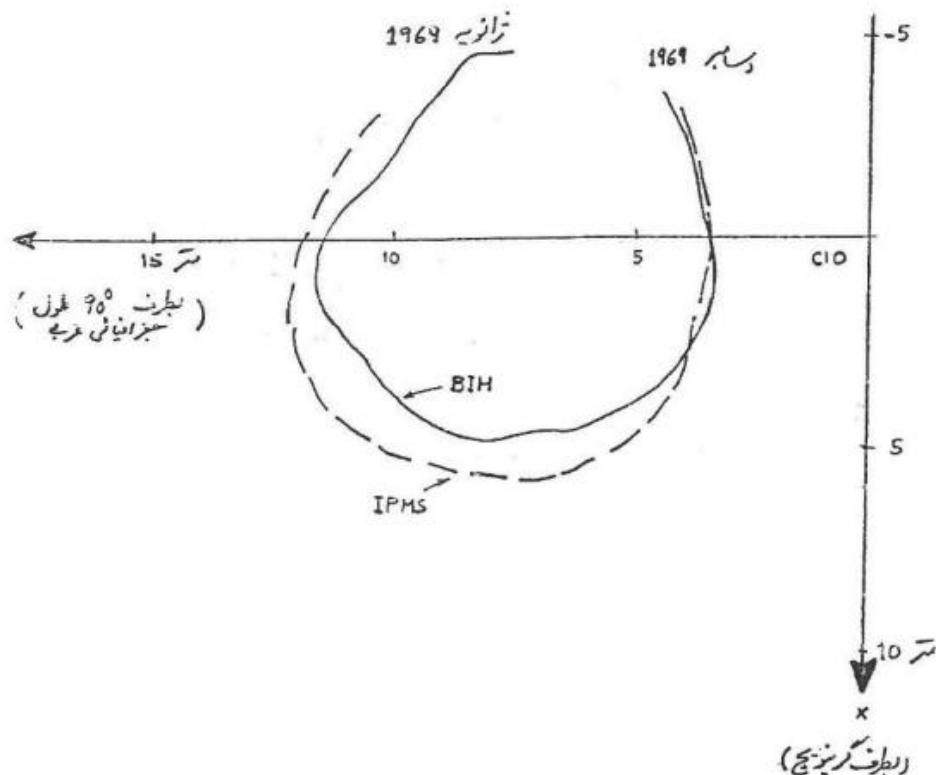
ما ابتدا در مسائل مربوط به محور دورانی زمین و نصف النهار گرینویچ و سپس درباره مرکز زمین بحث خواهیم کرد.

۱-۲- حرکات قطبی و دوران نامنظم زمین

معمولا تصور می شود که زمین حول محور ثابتی با سرعت و زمان یکنواخت دوران می کند در حالیکه نه محور دوران و نه زمان یک دوران هیچکدام ثابت و یکنواخت نیستند.

بیش از ۷۰ سال از کشف این مطلب که امتداد محور دورانی زمین نسبت به سطح زمین حرکت می کند، می گذرد. این حرکت قطب بیشتر به این دلیل است که محور دورانی زمین و محور حداکثر اینرشیای آن برهم عمود منطبق نیستند. مسیر این حرکت غیر منظم ولی کم و بیش دایره ای و در جهت حرکت عقربه های ساعت است (البته از منظر شمال). دامنه این حرکت ۵ متر با دوره ۴۳۰ روز که این دوره چندلر^۹ نامیده می شود. دو سازمان بین المللی یکی بنام IPMS و دیگری بنام BIH بطور منظم این حرکت را با استفاده از مشاهدات نجومی اندازه گیری می نمایند. IPMS از پنج ایستگاه واقع بر یک عرض جغرافیایی BIH از چهار ایستگاه که در نقاط مختلف دنیا تأسیس کرده اند این اندازه گیری ها را انجام می دهند.

نتایج این اندازه گیری ها و مشاهدات، بعنوان مختصات حقیقی محور دورانی منتشر می شود. مرجع و مبدأ این مختصات نقطه ای است که بطور اختصار (CIO) نامیده می شود و از سه حرف اول کلمات تشکیل دهنده جمله Conventional International Origin تشکیل شده است. این نقطه متوسط موقعیت محور دورانی زمین بین سال های ۱۹۰۵-۱۹۰۰ است. شکل ۱-۲ حرکت قطب ر در سال ۱۹۶۹ که بوسیله این دو سازمان تعیین شده نشان می دهد.



شکل ۱-۲ (حرکت قطبی)

تهیه و تنظیم:

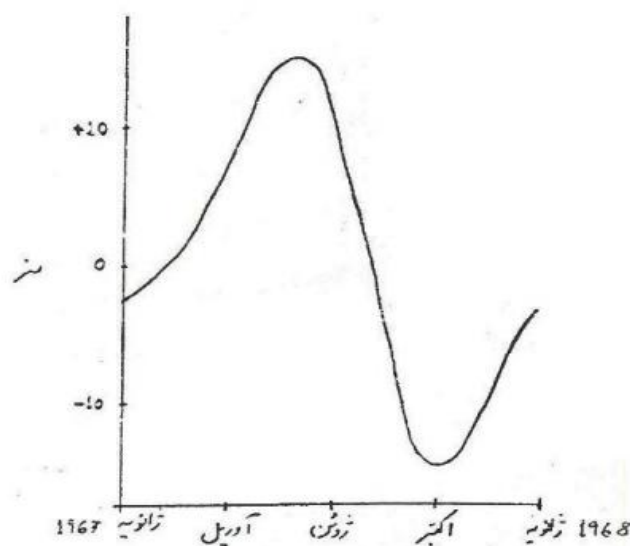
حمید جعفرزاده

chandler

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

حدود چهل سال قبل نامنظمی هایی در دوران زمین کشف شد البته این حرکات غیر منظم غیر از حرکت قطب است. مهمترین عامل این حرکات نامنظم تغییرات فصلی است که خود آن ملول جزر و مد زمین می باشد و کم و بیش تکرار آن قابل ثبت است و باعث ایجاد جابجایی تا حدود ۱۵ متر نسبت به نقطه ای که بطور یکنواخت دوران می کند در طول یک سال می باشد (شکل ۲-۲).

نصف النهار گرینویچ (صفحه گذرنده بر محور دورانی زمین و مرکز دستگاه ترانزیت در گرینویچ) بعلا این تغییرات و نوسانات فصلی بطور یکنواخت دوران نمی کند و برای رفع این اشکال یک نصف النهار صفر فرضی که بطور یکنواخت دوران کند بوسیله BIH هر سال تعریف می شود. البته در تعیین این نصف النهار تاکنون فقط توانسته اند اثرات حرکت قطبی و تغییرات فصلی را دخالت دهند. این نصف النهار محل متوسط مشاهدات ^{۲۰} یا نصف النهار متوسط نجومی گرینویچ نامیده می شود.



شکل ۲-۲

(موقعیت نقطه ای که بطور یکنواخت روی محیط استوا حرکت می کند منهای موقعیت واقعی آن نقطه روی محیط استوا)

۲-۱-۲- سیستم های زمینی متوسط و لحظه ای (Average and Instantaneous Terrestrial Systems)

- سیستم زمینی متوسط (A.T.) سیستم مختصات ایده آل ژئودزی است (شکل ۲-۳) و مشخصات آن به شرح زیر است:
 - الف- مبدأ آن مرکز ثقل زمین است
 - ب- قطب اولیه در جهت و سوی CIO ، صفحه اولیه صفحه ای است عمود بر قطب اولیه و گذرنده بر مرکز ثقل زمین (صفحه استوای متوسط) است.
 - ج- صفحه ثانویه صفحه ای است گذرنده بر قطب اولیه و نصف النهار متوسط گرینویچ ، محل برخورد این دو صفحه قطب اولیه یا محور اول است.
 - د- سیستم دست راستی است.

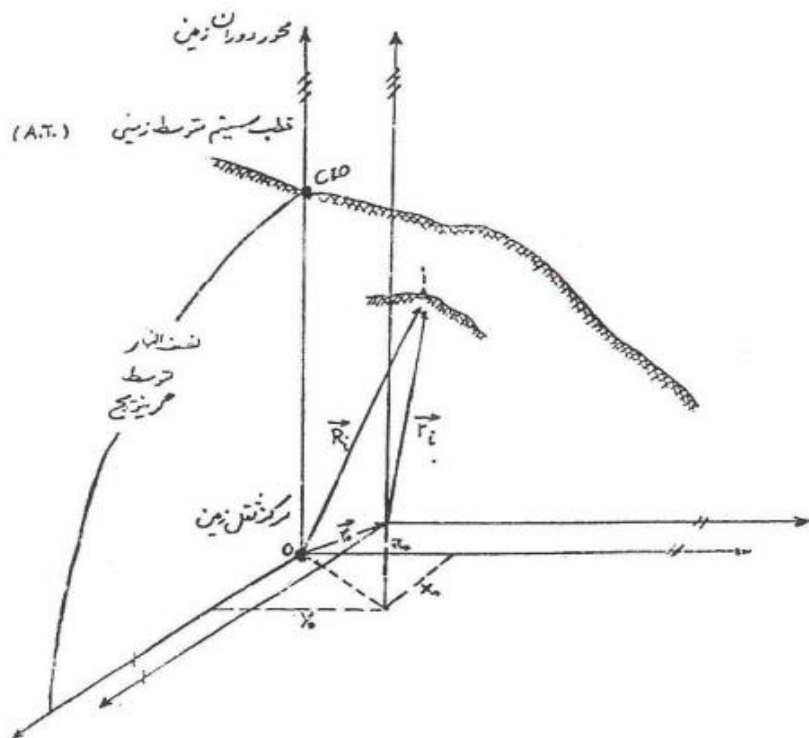
تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده
Mean observatory

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

می توان بردار وضعیت یک نقطه ای مانند i که با R_i نشان می دهیم برحسب مختصات کارترین x, y, z به شکل زیر تعریف نمود:

$$R_i = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} \quad (2-1)$$



شکل ۲-۳ (سیستم های مختصات زمینی و ژئودتیک)

- سیستم زمینی لحظه ای (I.T.) با مشخصات زیر تعریف می شود:

- الف- مبدأ مرکز ثقل زمین است
- ب- قطب اولیه بسوی محور حقیقی یا لحظه ای^{۲۱} دوران زمین است
- ج- محور اول محل تقاطع صفحه اولیه و صفحه گذرنده بر محور حقیقی دوران و نصف النهار متوسط نجومی گرینویچ است.
- د- سیستم دست راستی است

مشخصه اصلی این دو سیستم این است که آنها ژئوستریک هستند و مبدأ آنها مرکز ثقل زمین و قطب اولیه آنها محور دورانی زمین است.

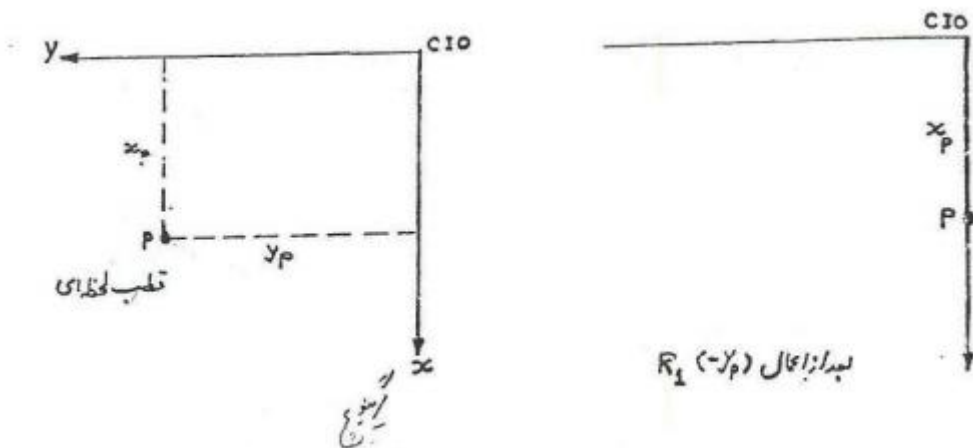
بوسیله ماتریس های دورانی، مختصات یک نقطه نسبت به سیستم مختصات زمینی لحظه ای را می توان به مختصات متوسط با استفاده از رابطه زیر تبدیل نمود (شکل ۲-۴):

و تنظیم:

حمید جعفرزاده
Instantaneous

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} = R_2(-x_p) R_1(-y_p) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{IT} \quad (2-2)$$



شکل ۲-۴ (تبدیل از سیستم لحظه ای به سیستم متوسط زمینی)

در رابطه فوق (x_p, y_p) بر حسب ثانیه کمانی و ماتریس های دورانی عبارتند از:

$$R_1(-y_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-y_p) & \sin(-y_p) \\ 0 & -\sin(-y_p) & \cos(-y_p) \end{bmatrix} \quad \checkmark \text{ دوران در جهت حرکت عقربه های ساعت (منفی) حول محور } x \text{ ها}$$

$$R_2(-x_p) = \begin{bmatrix} \cos(-x_p) & 0 & -\sin(-x_p) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-x_p) & 0 & \cos(-x_p) \end{bmatrix} \quad \checkmark \text{ دوران در جهت حرکت عقربه های ساعت (منفی) حول محور } y \text{ ها}$$

رابطه معکوس، یعنی تبدیل مختصات زمینی متوسط به لحظه ای را می توان با فرمول زیر محاسبه نمود:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{IT} = [R_2(-x_p) R_1(-y_p)]^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT}$$

و بعلاوه خاصیت تعامد ماتریس های دورانی عبارتند از:

$$R^{-1}(\theta) = R^T(\theta) = R(-\theta)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{IT} = R_1(y_p) R_2(x_p) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT}$$

تهیه و تنظیم:
(۲-۳) حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

سیستم مختصات ژئودتیک (G) بر حسب مختصات کارترین سیستمی است که سه محور آن منطبق و یا به موازات محورهاى سیستم مختصات زمینی متوسط باشد (شکل ۳-۲).

در حالت تطابق سیستم ها، سیستم مختصات ژئودتیک یک سیستم ژئوسنتریک و در حالت توازی سیستم ما یک سیستم نسبى خواهد بود. در حالت دوم ارتباط سیستم مختصات نسبى و سیستم مختصات متوسط بوسیله عوامل بردار انتقال datum :

$$\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

تأمین می شود. بر حسب معادلات برداری این رابطه بصورت زیر بیان می شود:

$$\vec{R}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_i$$

که در این معادله $\vec{r}_i$ بردار وضعیت نقطه A نسبت به سیستم ژئودتیک است و بصورت برداری به شکل زیر نوشته می شود:

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_G$$

و $\vec{R}_i$ بردار وضعیت A نسبت به سیستم متوسط می باشد، بنابراین معادله فوق در فرم برداری بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_G \quad (۳-۴)$$

جزئیات بیشتر در مورد سیستم نسبى ژئودتیک در بخش ۳-۲ توضیح داده خواهد شد ولی قبل از آن لازم است در اینجا مروری بر رابطه بین مختصات کارترین و منحنی الخط شود.

۳-۲-۲ رابطه بین مختصات کارترین و منحنی الخط

در این بخش ابتدا مختصات کارترین و منحنی الخط (عرض، طول و ارتفاع) یک نقطه واقع بر بیضوی مقایسه را شرح می دهیم و سپس بردار وضعیت بر حسب عرض های مختلف تعیین شده و در آخر در مورد تبدیل از مختصات ژئودتیک (φ, λ, h) به (x, y, z) و بالعکس بحث خواهد شد.

۳-۲-۱ مختصات کارترین و منحنی الخط یک نقطه روی بیضوی مقایسه

بیضوی که در ژئودزی بعنوان سطح مقایسه بکار می رود یک بیضوی دورانی است که از دوران یک بیضی حول محور اقصرش (شکل ۳-۵) پدید آمده باشد. قطر اطول این بیضی با a و میزان مسطح بودن آن با f^2 نشان داده می شود:

حمید جعفرزاده
مهندس ژئوماتیک و تنظیم:

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$f = \frac{a-b}{a}$$

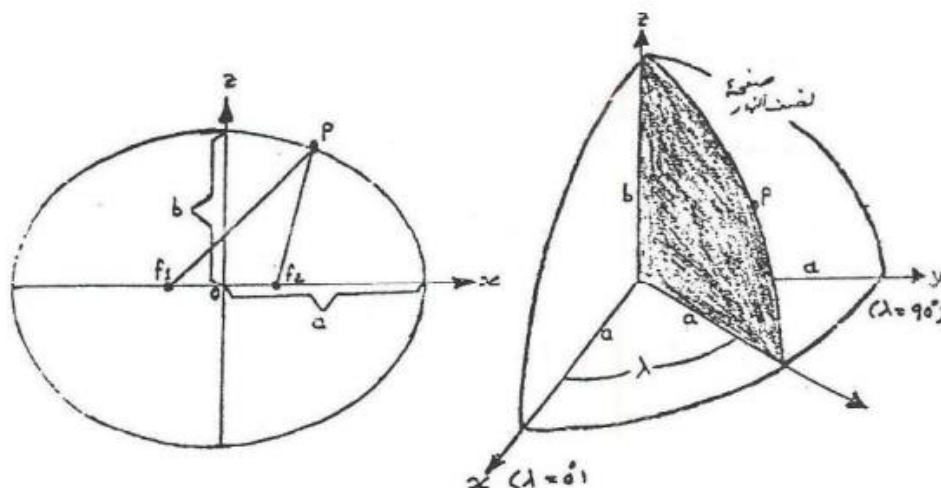
(۲-۵)

این عوامل پارامترهای مشخص بیضوی هستند.

دیگر پارامترهای مفید برای مشخص نمودن یک بیضوی اولین و دومین خارج از مرکزیت هستند که به ترتیب زیر تعریف می شوند:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \rightarrow \text{اولین خارج از مرکزیت} \quad (۲-۶)$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \rightarrow \text{دومین خارج از مرکزیت} \quad (۲-۷)$$



شکل ۲-۵ (بیضوی مقایسه)

یک سیستم مختصات کارترین سیستمی است که برای تعیین مختصات نقاط واقع بر بیضوی مقایسه بکار می رود بطوریکه :

الف- مبدأ مختصات این سیستم مرکز بیضوی است

ب- قطب اولیه (محور Z) سیستم نصف قطر اقصر بیضوی بوده و صفحه اول عمود بر قطب اولیه است و صفحه استوا نامیده می شود.

ج- هر صفحه ای که شامل نصف قطر اقصر بوده و سطح بیضوی را قطع نماید صفحه نصف النهار نامیده می شود. صفحه نصف النهار مخصوصی که بعنوان صفحه ثانویه انتخاب شده نصف النهار گرینویچ نامیده می شود. قطب دوم (محور X) عبارت است از محل برخورد صفحه استوا و صفحه نصف النهار گرینویچ

د- محور قطبی طوری انتخاب می شود که سیستم مختصات دست راستی بوده و این محور در صفحه استوا ۹۰ درجه در خلاف جهت عقربه های ساعت با محور Xها فاصله داشته باشد.

معادله این بیضوی (در فرمول برداری) بر حسب مختصات کارتزین بصورت :

$$\vec{x}^T S_E \vec{x} = 1 \quad (2-8)$$

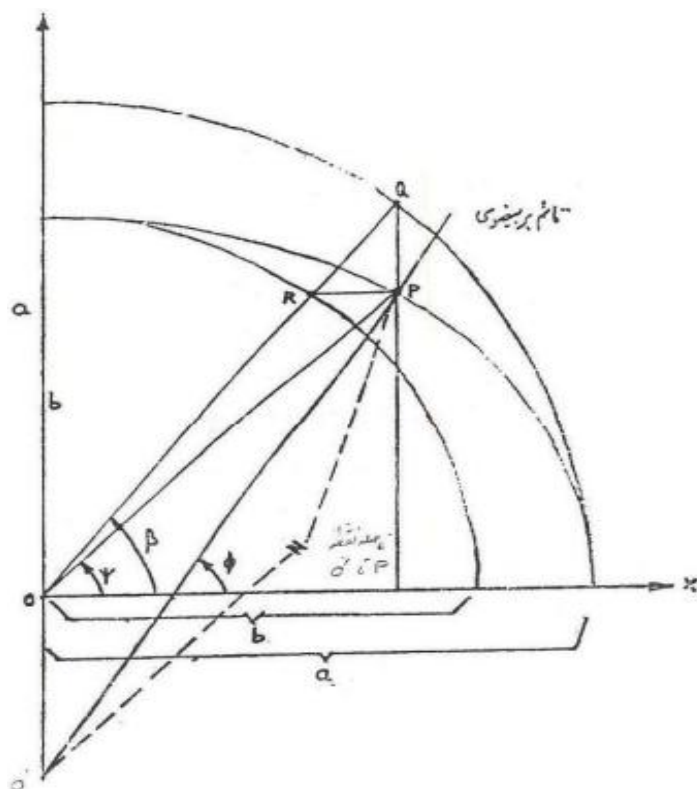
در این فرمول $\vec{x}^T = [x \ y \ z]$ و $(2-9)$ است و یا می توان فرمول بیضوی را

$$S_E = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix}$$

بصورت زیر نوشت:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2-10)$$

عرض ژئودتیک^{۲۳} یک نقطه فاصله زاویه ای کمتر از ۹۰ درجه بین صفحه استوا و قائم بر بیضوی در آن نقطه است و در صفحه نصف النهار گذرنده بر آن نقطه اندازه گیری می شود. خط عمود بر سطح بیضوی در یک نقطه قائم بر بیضوی در آن نقطه نامیده می شود. عرضی که بطریق فوق تعریف شد با φ نشان داده می شود. زاویه بین خطوط واصل یک نقطه از بیضوی و مرکز بیضی با صفحه استوا عرض ژئوسنتریک^{۲۴} آن نقطه نامیده شده و با ψ نشان داده می شود. عرض دیگری نیز که بیشتر بعنوان یک تسهیل ریاضی از آن استفاده می شود و عرض تبدیل یافته نامیده می شود که با β نشان داده می شود (شکل ۶-۲).



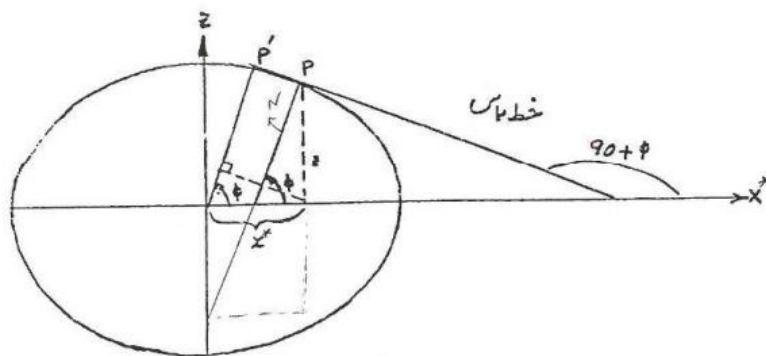
شکل ۶-۲ (عرض های مختلف)

تهیه و تنظیم:

حمید مجتبی زاده
Geodetic Latitude
Geocentric Latitude

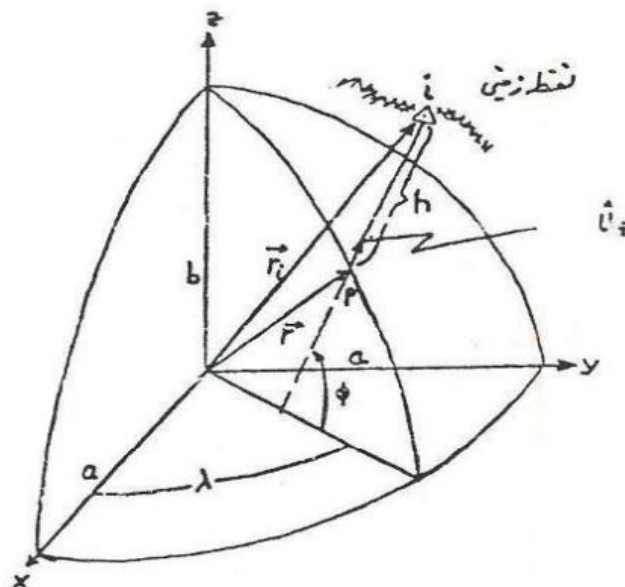
دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

طول جغرافیایی $^{\circ}\lambda$ یک نقطه بر بیضوی، فاصله زاویه در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت بین صفحه نصف النهار گرینویچ و نصف النهار گذرنده بر آن نقطه است که با λ نشان می دهند (شکل ۲-۵).



شکل ۲-۷ (خط مماس بر بیضی نصف النهار)

ارتفاع از بیضوی یک نقطه عبارت است از فاصله خطی بالای بیضوی که در طول قائم بر بیضوی از آن نقطه اندازه گیری می شود (شکل ۲-۸).



شکل ۲-۸ (نقطه ای واقع در بالای بیضوی مقایسه)

۲-۲-۲- بردار وضعیت بر حسب عرض ژئودتیک

نقطه ای مانند P روی سطح بیضوی در نظر می گیریم. مختصات P نسبت به یک سیستم که محور اول آن در صفحه نصف النهار نقطه P و با x^* نشان داده شده باشد بصورت زیر خواهد بود:

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

Longitudinal

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

hamid73j@ymail.com

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x^* \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

صفحه عمود بر قائم بر بیضوی در P و گذرنده بر P صفحه مماس بر بیضوی در نقطه P نامیده می شود. از شکل ۷-۲ شیب صفحه مماس عبارت است از:

$$\frac{dz}{dx^*} = \tan(90^\circ + \varphi) = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \quad (2-12)$$

شیب را می توان همچنین از معادله بیضی نصف النهار هم به ترتیب زیر بدست آورد:

$$\frac{(x^*)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2-13)$$

و یا

$$b^2(x^*)^2 + a^2z^2 = a^2b^2 \quad (2-14)$$

$$2b^2x^*dx^* + 2a^2zdz = 0 \quad (2-15)$$

$$\frac{dz}{dx^*} = -\frac{b^2x^*}{a^2z} \quad (2-16)$$

از دو معادله شیب که در بالا ذکر شد خواهیم داشت:

$$\frac{b^2x^*}{a^2z} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \quad (2-17)$$

$$b^2x^* \cdot \sin \varphi = a^2z \cdot \cos \varphi \quad (2-18) \text{ و یا } (2-18)$$

که بعد از مربع کردن معادله فوق بصورت زیر خواهد بود:

$$b^4(x^*)^2 \cdot \sin^2 \varphi = a^4z^2 \cdot \cos^2 \varphi \quad (2-19)$$

معادلات ۲-۱۴ و ۲-۱۹ را می توان به فرم ماتریسی و به شکل زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} b^4 \cdot \sin^2 \varphi & -a^4 \cdot \cos^2 \varphi \\ b^2 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x^*)^2 \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a^2b^2 \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

معکوس ماتریس اول عبارت است از:

$$\frac{1}{a^2b^2(a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi)} \begin{bmatrix} a^2 & a^4 \cdot \cos^2 \varphi \\ -b^2 & b^4 \cdot \sin^2 \varphi \end{bmatrix}$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

ناقص
دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

hamid73j@ymail.com

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

hamid73j@ymail.com

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \frac{b^2}{a^2} \sin \varphi \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

و یا

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+H) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N+H) \cos \varphi \sin \lambda \\ (N \frac{b^2}{a^2} + h) \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

واضح است که بردار $\vec{r}$ در معادله فوق بردار وضعیت نقطه ای را نسبت به سیستم مختصاتی که مبدأ آن مرکز بیضوی است مشخص می کند. اگر این بیضوی یک سیستم ژئودتیک نسبی را تعریف کند عموماً مرکز آن منطبق بر مرکز ثقل زمین نخواهد بود. برای تعیین بردار وضعیت نقطه ای نسبت به سیستم AT در حالیکه بردار وضعیت آن نسبت به یک سیستم ژئودتیک نسبی درست است با استفاده از رابطه زیر خواهیم داشت:

$$(\vec{r}_i)_{AT} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + (\vec{r}_i)_G$$

$$(\vec{r}_i)_{AT} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (N+H) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N+H) \cos \varphi \sin \lambda \\ (N \frac{b^2}{a^2} + h) \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

این معادله فرمول عمومی تبدیل از مختصات ژئودتیک نسبی (φ, h, λ) به مختصات زمینی متوسط (x, y, z) را در حالیکه a, b و عوامل انتقال x_0, y_0, z_0 در دست باشند بیان می کند.

۲-۲-۳- تبدیل از مختصات کارترین زمینی متوسط به مختصات ژئودتیک:

یک تبدیل بسیار مهم تبدیل معکوس معادله ۲-۳۲ است یعنی حالتی که در آن مختصات زمینی متوسط (x, y, z) و عوامل انتقال (x_0, y_0, z_0) و اندازه بیضوی (a, b) داده شده اند و می خواهیم مختصات ژئودتیک نسبی (φ, h, λ) را تعیین کنیم. ابتدا مبدأ مختصات را از مرکز ثقل زمین به مرکز بیضوی انتقال می دهیم. از معادله ۲-۳۲ داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

تهیه و تنظیم:
حمید جعفرزاده (۲-۳۳)

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

طول ژئودتیک را می توان مستقیماً از فرمول زیر حساب نمود:

$$\lambda = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (2-34)$$

محاسبه عرض ژئودتیک و ارتفاع مشکل تر از طول ژئودتیک است. زیرا N تابعی است از φ ، از معادله ۲-۲۲ داریم:

$$N = \frac{a}{(\cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (2-35)$$

برای محاسبه φ, h محاسبات زیر را به ترتیب انجام می دهیم:

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (2-36)$$

$$P = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2-37)$$

و یا

$$h = \frac{P}{\cos \varphi} - N \quad (2-38)$$

همچنین از معادله ۲-۲۱ داریم:

$$z = (N \frac{b^2}{a^2} + h) \sin \varphi = (N - \frac{a^2 - b^2}{a^2} N + h) \sin \varphi = (N + h - e^2 N) \sin \varphi$$

بنابراین:

$$\frac{z}{P} = \frac{(N + h - e^2 N) \sin \varphi}{(N + h) \cos \varphi} = \tan \varphi \cdot (1 - \frac{e^2 N}{N + h}) \quad (2-39)$$

با استفاده از این فرمول می توان φ را از دو راه محاسبه کرد. یکی از طریق تکرار و دیگری بطور مستقیم. برای محاسبه بطریق تکرار از فرمول ۲-۱۹ استفاده می شود:

$$\varphi = \tan^{-1} \left[\left(\frac{z}{P} \right) \left(1 - \frac{e^2 N}{N + h} \right)^{-1} \right]$$

برای شروع تکرار در کامپیوتر مقادیر اولیه را به ترتیب زیر معرفی می نماییم:

$$N_0 = a$$

$$h_0 = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - (ab)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[\left(\frac{z}{P} \right) \left(1 - \frac{e^2 N}{N + h} \right)^{-1} \right]$$

تیمیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

تکرار هادی از فرمول زیر که در آن i شماره تکرار است استفاده می کنیم:

hamid73j@ymail.com

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$N_i = \frac{a}{(\cos^2 \varphi_{i-1} + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi_{i-1})^{\frac{1}{2}}}$$

$$h_i = \frac{P}{\cos \varphi_{i-1}} - N_i$$

$$\varphi_i = \tan^{-1} \left[\left(\frac{z}{P} \right) \left(1 - \frac{e^2 N_i}{N_i + h_i} \right)^{-1} \right]$$

این تکرارها تا رسیدن به حد دقتی که بستگی به کامپیوتر دارد ادامه می یابد یعنی تا حدی که:

$$(h_i - h_{i-1}) < a \varepsilon$$

$$(\varphi_i - \varphi_{i-1}) < \varepsilon$$

با مراجعه به معادله ۲-۳۹ می توانیم h را با استفاده از معادله ۲-۳۸ حذف نمود و $\frac{z}{p}$ را تعیین کنیم:

$$\frac{z}{p} = \tan \varphi \left(1 - \frac{e^2 N \cos \varphi}{P} \right)$$

$$P \tan \varphi - z = e^2 N \sin \varphi$$

و یا

در این معادله تنها مجهول φ است. با جایگزین کردن N از معادله ۲-۳۵ در معادله بالا خواهیم داشت:

$$P \tan \varphi - z = \frac{a e^2 \sin \varphi}{(\cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

که پس از تقسیم صورت و مخرج کسر فوق بر $\cos \varphi$ داریم:

$$P \tan \varphi - z = \frac{a e^2 \sin \varphi}{(\cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$(P \tan \varphi - z) (1 + (1 - e^2) \tan^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = a e^2 \tan \varphi$$

و یا

$$(P \tan \varphi - 2Pz \tan \varphi + z^2) (1 + (1 - e^2) \tan^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = a^2 e^4 \tan^2 \varphi$$

و یا

$$P^2 \tan^4 \varphi - 2Pz \tan^3 \varphi + (\beta + z^2) \tan^2 \varphi - \frac{2Pz \tan \varphi}{1 - e^2} = 0$$

$$\beta = \frac{P^2 - a^2 e^4}{(1 - e^2)}$$

که در آن:

این رابطه معادله ای است از درجه ۴ بر حسب $\tan \varphi$ که تمام ضرائب آن معلوم هستند. برنامه ای که برای این روش تعیین φ با استفاده از کامپیوتر نوشته شده ۲۵٪ از نظر زمانی نسبت به روش تکراری سریع تر عمل نموده است.

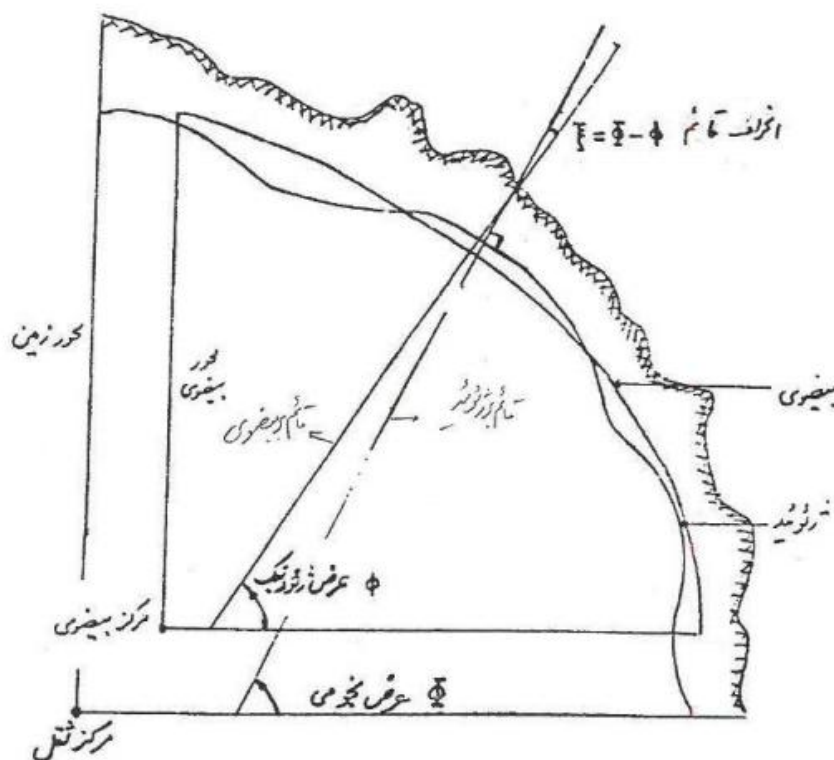
این رابطه معادله ای است از درجه ۴ بر حسب $\tan \varphi$ که تمام ضرائب آن معلوم هستند. برنامه ای که برای این روش تعیین φ با استفاده از کامپیوتر نوشته شده ۲۵٪ از نظر زمانی نسبت به روش تکراری سریع تر عمل نموده است.

برای تعیین فرم زمین می توان دو نوع طبقه بندی در نظر گرفت:

۱- شکل طبیعی زمین

۲- شکل هندسی نزدیک به فرم واقعی زمین

شکل طبیعی زمین خود بر دو نوع است: یکی به فرم طبیعی یا توپوگرافیک زمین با انضمام سطح اقیانوس ها و دیگری سطح هم پتانسیل که منطبق است بر سطح ایده آل اقیانوس ها (ژئوئید) (شکل ۹-۲). در مورد شکل هندسی نزدیک به فرم زمین و یا فرم غیر طبیعی زمین که موضوع درس ژئودزی ۲ قسمتی از آن است توضیح بیشتری در این قسمت لازم است.



شکل ۹-۲ (مقطع نصف النهاری زمین)

اندازه گیری هایی که لازم است برای تعیین این فرم انجام گیرد به اندازه گیری های کنترل^{۲۷} موسوم است (برای مثال اندازه گیری طول ها، زوایا و تراز یابی دقیق) و نقاطی که این اندازه گیری روی آنها انجام می گیرند نقاط کنترل نامیده می شود. پس از انجام این مشاهدات، آنها را برای تعیین روابط هندسی موجود بین نقاط کنترل در محاسباتی بنام تعدیل شبکه^{۲۸} بکار می روند. نقاط دیگری که به شبکه نقاط کنترل بوسیله اندازه گیری ها و محاسبات بیشتر اتصال دارند نقاط تکثیر یافته^{۲۹} نامیده می شوند. از طریق کلاسیک، اندازه گیری های قائم و شبکه ها و محاسبات مربوط به آنها بطور جداگانه از اندازه گیری های افقی و شبکه

نمونه و تعریف
Geodetic Datum's^{۲۶}
Control measurement^{۲۷}
Network adjustment^{۲۸}
densification^{۲۹}

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

ها و محاسبات آنها انجام می گیرد لکن از روش سه بعدی^{۳۰} که در سال های اخیر بکار برده می شود می توان تمام اندازه گیری ها و محاسبات قائم و افقی را یکی انجام داد.

در روش کلاسیک اندازه گیری های قائم و شبکه های مربوطه نسبت به یک سطح مختصات یا datum قائم که همان ژئوئید است انجام می شود ولی برای اندازه گیری های افقی و شبکه های آن سطح سومی بجای دو سطح طبیعی که ابتدای این قسمت تعریف شد در نظر گرفته می شود. این سطح یک فرم غیر طبیعی (یعنی صرفاً ریاضی) زمین است و همان بیضوی دورانی می باشد که در قسمت های قبل راجع به آن بحث شد. دلیل اینکه یک شکل ریاضی نظیر بیضوی بعنوان سطح مختصات افقی^{۳۱} در نظر می گیریم، سهولت محاسبات لازم برای تعدیل شبکه ها و تکثیر نقاط است.

واضح است که به علت عدم تطابق سطح مختصات افقی با ژئوئید لازم است تصحیحاتی به محاسبات اعمال شود ولی می توان بیضوی را طوری انتخاب نمود که به اندازه کافی به ژئوئید نزدیک باشد یعنی تا حدی که این تصحیحات را خطی فرض نمود و یا در صورت امکان بتوان آنها را نادیده گرفت. برای بیضوی ای که به خوبی انتخاب شده باشد (شکل) اختلاف یا جدایی بین آن و ژئوئید همواره کمتر از ۱۰۰ متر و اختلاف بین قائم های بر بیضوی و ژئوئید (انحراف قائم^{۳۲}) در هر نقطه ای کمتر از ۵ ثانیه خواهد بود و بسیار ندرتا از ۱ دقیقه تجاوز خواهد کرد. برای معرفی یک بیضوی مختصات جدید باید مراحل مختلفی از عملیات و محاسبات را انجام داد که در قسمت های بعدی در مورد آنها بحث خواهد شد ولی در اینجا لازم است گفته شود که شبکه کنترل افقی (یعنی مختصات نقاط شبکه) باید به این بیضوی نسبت داده شود بنابراین قبل از آغاز محاسبات شبکه، اندازه گیری های نقاط کنترل باید تبدیل به سطح این بیضوی گردد.

۱-۳-۲- پارامترهای مشخص کننده وضعیت سطح مختصات (datum position parameters)

برای ایجاد یک بیضوی بعنوان یک سطح مختصات بایستی شکل و اندازه آن را تعیین نمود (معمولاً این کار با در نظر گرفتن مقادیری برای نصف قطر اطول و فشردگی بیضوی انجام می گیرد) و همچنین باید وضعیت این بیضوی نسبت به زمین مشخص شود. یک بیضوی که به خوبی تعیین شده باشد دارای این مشخصه است که با تقریب کافی به سطح ژئوئید در منطقه ای که شبکه در آن قرار دارد نزدیک خواهد بود. پارامترهایی که به آنها مقادیری جهت تعیین وضعیت بیضوی نسبت می دهیم پارامترهای وضعیت سطح مختصات گوییم.

در فضای سه بعدی هر شکلی دارای شش درجه آزادی است. یعنی شش راه وجود دارد که این شکل (در حالتی که ما با آن سر و کار داریم این شکل بیضوی است) نسبت به یک شکل ثابت (در ژئودزی زمین شکل ثابت است) موقعیتش می تواند تغییر نماید بنابراین شش پارامتر در تعیین وضعیت یک datum بایستی معین شوند.

راه دیگر بررسی این مسئله این است که دو سیستم سه بعدی کارترین که یکی به زمین و دیگری به بیضوی مربوط باشند در نظر گرفته شوند. مبدأ های این دو سیستم عموماً منطبق نیستند و محورهای مختصات آنها نیز به موازات هم نخواهند بود بنابراین برای تبدیل یک سیستم به سیستم دیگر بایستی محل یک مبدأ نسبت به مبدأ دیگر و وضعیت یک دسته از محورهای مختصات نسبت به دسته دیگر مشخص گردد یعنی سه مختصات و سه دوران که جمعا شش پارامتر می شوند باید تعیین شوند. این شش پارامتر همان شش درجه آزادی هستند که در بالا به آنها اشاره شد و مقادیری که برای آنها تعیین می شوند مشخص کننده وضعیت بیضوی نسبت به زمین هستند که آنها را پارامترهای مشخص کننده وضعیت datum می نامیم.

تعیین و تنظیم
Three dimensional datum
Horizontal datum
Deflection of vertical

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

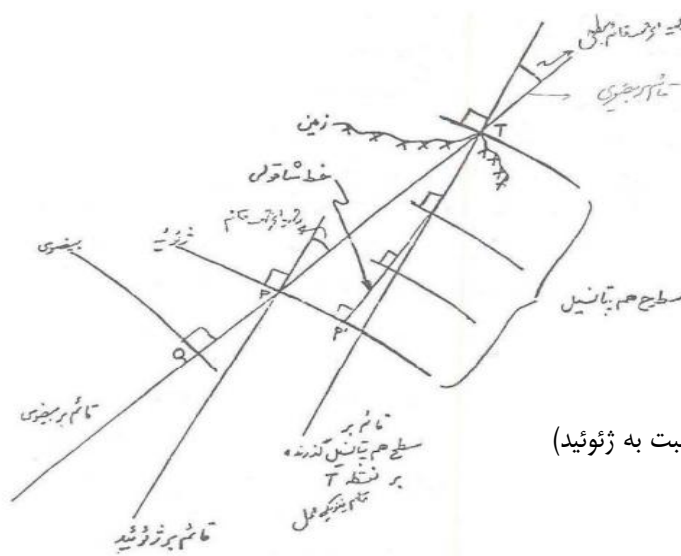
با توجه به مطالب فوق می توان گفت برای تعیین کامل یک datum هشت پارامتر بایستی تعیین شوند که دو تا از آنها مربوط به شکل و اندازه بیضوی است (نصف قطر اطول و فشردگی) و شش پارامتر دیگر مربوط به موقعیت آن نسبت به زمین می باشند.

عملا دو نوع پارامترهای مشخص کننده وضعیت datum وجود دارد: نوع اول این است که مبدأ های دو سیستم مختصات مربوط به بیضوی و زمین را در همسایگی و نزدیکی مرکز زمین در نظر بگیریم و نوع دیگر این است که مبدأ های دو سیستم را در نقطه ای نزدیک به سطح زمین فرض نماییم که این نقطه را نقطه اولیه بیضوی^{۳۳} می نامند.

در حالت اول (ژئوسنتریک) سیستم مختصات مربوط به زمین همان سیستم زمینی متوسط^{۳۴} است که به اختصار آن را با A.T. نشان می دادیم و در بخش ۲-۱-۲ راجع به آن بحث شد و سیستم مختصات مربوط به بیضوی سیستم مختصات ژئودتیک فرمول ۲-۳۱ است با این استثنا که در اینجا عموما فرض می کنیم که محورهای مختصات ژئودتیک و A.T. باهم موازی نیستند. در این حالت پارامترهای مشخص کننده وضعیت DATUM عبارتند از مختصات مبدأ مختصات سیستم ژئودتیک نسبت به سیستم A.T. که با x_0, y_0, z_0 نشان داده می شوند (به معادله ۲-۳۲ رجوع شود) و سه زاویه دوران مثلا $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ که معرف زوایای بین دو دسته محورهای مختصات دو سیستم هستند. البته بسیار مطلوب است اگر وضعیت بیضوی طوری تعیین شود که این زوایا بسیار کوچک باشند مخصوصا اگر محورهای تقارن که در بیضوی قطر اطول و در زمین محور دورانی متوسط آن است موازی باشند.

در حالت دوم (توپوسنتریک) سیستم مختصات مربوط به زمین، یک سیستم نجومی محلی در نقطه اولیه و سیستم مربوط به بیضوی یک سیستم ژئودتیک محلی در همان خواهند بود (در مورد این دو سیستم در بخش ۲-۴ توضیح داده خواهد شد).

قبل از ادامه این مطلب لازم است نکات مهمی در مورد مفهوم هندسی همسایگی یک نقطه واقع بر روی سطح زمین توضیح داده شود. شکل ۲-۱۰ نمایانگر یک صفحه نصف النهار ژئودزی در چنین نقطه ای است که البته به منظور تفهیم بهتر مسئله، در مورد اندازه ی زوایا افراط شده به این معنا که اندازه زوایا و انحناء بسیار بزرگتر از آنچه که در عمل با آن مواجه می شویم نمایش داده شده اند. این شکل نشان دهنده مقاطع بیضوی، ژئوئید، زمین و تعدادی سطوح هم پتانسیل مربوط به ژئوئید می باشد.



شکل ۲-۱۰ (توجیه بیضوی نسبت به ژئوئید)

تهیه و تنظیم:

حمید مجفرازاده
Initial point of the datum^{۳۳}
Average terrestrial

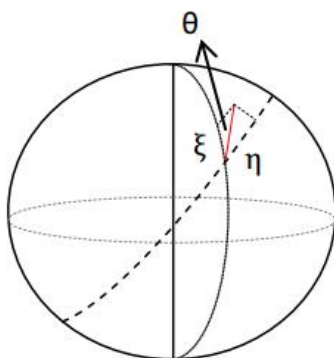
دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

قائم بر بیضوی در نقطه ای مانند Q، ژئوئید و زمین را به ترتیب در P و T قطع می کند. متناظر با این قائم سه قائم طبیعی (طبیعی به این معنا که این قائم ها بستگی به فیزیک دارند) نیز بصورت زیر تعریف می شوند:

- ۱- قائم بر سطح هم پتانسیل گذرنده بر نقطه T^{۳۵}
- ۲- قائم بر سطح ژئوئید در نقطه P^{۳۶}
- ۳- خط شاقولی که تمام سطوح هم پتانسیل واقع بین سطح ژئوئید و نقطه T عمود است که بعلاوه عدم توازی سطوح هم پتانسیل این خط مستقیم نیست^{۳۷}.

هیچ یک از این سه قائم در صفحه نصف النهار ژئودتیک واقع نیستند و در این شکل تصاویر آنها در این صفحه نمایش داده شده است. اگر از انحنای خط شاقولی صرف نظر کنیم این خط منطبق بر قائم اول و به موازات قائم دوم خواهد شد.

صفحه نصف النهار نجومی، صفحه ای است گذرنده بر یکی از قائم ها و خطی به موازات سیستم A.T. زاویه بین این خط قائم و خط موازی با محور Zهای سیستم A.T. را متمم عرض نجومی (Φ) نقطه^{۳۸} می نامند و مساوی است با $(\frac{\pi}{2} - \Phi)$. زاویه بین صفحه نصف النهار نجومی و صفحه نصف النهار گرینویچ طول نجومی^{۳۹} نامیده شده و آن را با Λ نشان می دهیم. زاویه بین قائم بر بیضوی و قائم بر ژئوئید انحراف قائم^{۴۰} نامیده می شود که می توان آن را به دو مؤلفه ξ در صفحه نصف النهار ژئودتیک و η در صفحه قائم اصلی ژئودتیک تجزیه نمود (صفحه قائم اصلی ژئودتیک صفحه ای است گذرنده بر قائم بر بیضوی و عمود بر صفحه نصف النهار ژئودتیک).



بنابراین با زاویه دو قائم طبیعی، دو دسته مقادیر برای طول و عرض و مؤلفه های انحراف قائم خواهیم داشت و چنانچه انحنای خط شاقولی نادیده فرض شود مقادیر این دو دسته با هم برابر خواهند بود.

اگر بیضوی طوری تعیین شود که محورهای ژئوستریک آن به موازات محورهای A.T. باشند یعنی $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ ، خواهیم داشت:

$$\xi = \Phi - \varphi \quad (2-40)$$

^{۳۵} Surface gravity vertical

^{۳۶} Geoid gravity vertical

^{۳۷} Plumb line

^{۳۸} Astronomical co-latitude

^{۳۹} Astronomical longitude

^{۴۰} Deflection of vertical

$$\eta = (\Delta - \lambda) \cos \varphi$$

(۲-۴۱)

که (φ, λ) مختصات ژئودتیک مشترک نقاط Q, P, T است.

فاصله بین سطوح بیضوی و ژئوئید اندازه گیری شده در طول قائم بر بیضوی (QP) ارتفاع ژئوئید است و با N^* نشان داده می شود. فاصله بین بیضوی و زمین، اندازه گیری شده در طول قائم بر بیضوی (QT) ارتفاع بیضوی است و با h نشان داده می شود. فاصله بین ژئوئید و زمین، اندازه گیری شده در طول خط شاقولی PT ارتفاع ارتومتریک نامیده می شود و با H معرفی می شود. اگر از انحنای خط شاقولی صرف نظر شود خواهیم داشت:

$$h = N^* + H$$

(۲-۴۲)

زاویه بین صفحه نصف النهار ژئودتیک نقطه T و صفحه گذرنده بر نقطه ای دیگر که به فاصله ای از T قرار دارد و قائم بر بیضوی (QPT)، آزیموت ژئودتیک (α) آن نقطه نسبت به نقطه Q, P و یا T است. زاویه بین صفحه نصف النهار نجومی و صفحه گذرنده بر این نقطه و قائم طبیعی متناظر نقطه T آزیموت نجومی (A) است نسبت به نقاط P یا T بسته به اینکه کدامیک از دو قائم طبیعی بکار برده شده باشد. بعلاوه کوچک بودن زاویه انحراف قائم برای تمام نقاط اختلاف دو آزیموت نجومی و ژئودتیک: $\delta\alpha = A - \alpha$ (۲-۴۳) تقریباً مقداری است ثابت و مساوی است با زاویه بین صفحات نصف النهار ژئودتیک و نجومی.

باز می گردیم به بحث در مورد پارامترهای وضعیت datum در حالت توپوسنتریک، طبیعی است که تصور کنیم مبدأ سیستم ژئودتیک محلی در نقطه اولیه بر روی سطح datum یعنی روی بیضوی واقع باشد یعنی اینکه بیضوی از نقطه اولیه که نقطه ای واقع بر یا بالای زمین است بگذرد. در روش معمولی ژئودزی (دو بعدی) ارتفاع ارتومتریک فقط برای تبدیل مقادیر سطح به ژئوئید داخل محاسبات شبکه های افقی می شود. بنابراین طبیعی است که مبدأ مختصات سیستم نجومی محلی در نقطه اولیه واقع بر ژئوئید باشد و چنانچه کمیت های مربوط به نقطه اولیه را با اندیس صفر نشان دهیم می توانیم بگوییم که در اینجا جهت شش پارامتر وضعیت datum عبارتند از: مختصات ژئودتیک مبدأ سیستم نجومی محلی $(\varphi_0, \lambda_0, N_0^*)$ و سه زاویه دوران لازم برای تعیین تبدیل بین سیستم های محلی ژئودتیک و نجومی یعنی $(\xi_0, \eta_0, \delta\alpha_0)$.

۲-۳-۲ ایجاد یک datum

دیدیم که می توان یک datum را با نسبت دادن مقادیری به هشت پارامتر $(a, b, x_0, y_0, z_0, w_1, w_2, w_3)$ یا $(a, b, \varphi_0, \lambda_0, N_0^*, \xi_0, \eta_0, \delta\alpha_0)$ تعریف نمود لیکن نسبت دادن مقادیری اختیاری عموماً رضایت بخش نبوده و datum تعریف شده بوسیله این طرز اختیاری مفید نخواهد بود و حتماً باید آن را طبق شرایطی تعیین و تعریف نمود. یکی از این شرایط این است که datum با تقریب کافی در منطقه شبکه ای که datum مربوط به آن است به ژئوئید با تقریب کای نزدیک باشد به حدی که بتوان آنها را یکسان فرض نمود و دیگر اینکه محورهای مختصات ژئوسنتریک سیستم مختصات ژئودتیک با محورهای مختصات سیستم A.T. موازی و یا نزدیک به حالت توازی مخصوصاً در مورد محورهای تقارن باشند. مرحله ای که در آن مقادیری با توجه به شرایط فوق برای هشت پارامتر تعیین می شود مرحله ایجاد یک datum نامیده می شود.

در ایجاد یک datum همواره نسبت دادن مقادیری به مجموعه توپوسنتریک یعنی $(a, b, \varphi_0, \lambda_0, N_0^*, \xi_0, \eta_0, \delta\alpha_0)$ مطرح است تا به مجموعه ژئوسنتریک یعنی $(a, b, x_0, y_0, z_0, w_1, w_2, w_3)$ ، زیرا پارامترهای مجموعه توپوسنتریک مستقیماً مربوط به اندازه گیری های ژئودزی و نجومی که باید در تعیین و ایجاد datum بکار روند. می بینیم مقادیر

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
حمید جعفرزاده

$(a, b, \varphi_0, \lambda_0, N_0^*, \xi_0, \eta_0, \delta\alpha_0)$ باید به روشی تعیین شوند که (N^*, ξ, η) در نقاط دیگری از شبکه بجز نقطه اولیه نیز مقادیر زیادی نباشند تا تقارب datum با ژئوئید حفظ شود و یا چنانچه هدف ایجاد یک datum ژئوسنتریک است $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ باشد تا دو دسته محورهای مختصات که قبلا در این مورد ذکر شد باهم موازی باشند. واضح است که شبکه هایی که برای ایجاد یک datum ژئوسنتریک بکار می روند شبکه های جهانی هستند و لازم است که در این موارد $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ باشد datum های ژئوسنتریک datum های محلی نامیده می شوند.

از مسئله تقارب ژئوئید و datum می توان با قرار نمودن شرط زیر صرف نظر نمود:

$$N_0^* = \xi_0 = \eta_0 = 0$$

البته باید توجه داشت که توأم با این شرایط حتما بایستی شرط مینیمم بودن (N^*, ξ, η) در سایر نقاط نیز برقرار باشد و اگر چنین نباشد مقادیر فوق را نباید برابر با صفر فرض کرد.

ایجاد یک datum به دو طریق امکان دارد، بدین معنی که مقادیر $(a, b, N_0^*, \xi_0, \eta_0)$ را باید به طریقی انتخاب نمود که یا (ξ, η) و یا (N^*) در سرتاسر شبکه مینیمم شود یعنی اینکه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\min_f \oint_s (\xi^2 + \eta^2) ds$$

$$\min_{a,b} \oint_s (N^2) ds$$

باید دانست که مقادیر (N^*, ξ, η) هنگامی در سرتاسر شبکه در دست خواهند بود که قبلا یک شبکه تعدیل شده موجود باشد و این نکته نشان دهنده طبیعت تکراری و ترمیمی datum است یعنی همیشه برای ایجاد یک datum جدید از یک datum موجود استفاده نموده و آن را ترمیم می نمایند عبارت دیگر ایجاد یک datum در یک زمان بطوریکه بهترین و نزدیکترین تقارب را با ژئوئید با توجه به امکانات آن زمان داشته باشد. «best fitting ellipsoid» تنها با ترمیم یک datum موجود امکان دارد.

روش کلاسیک برای اطمینان به موازی بودن محورهای تقارن، تحمیل شرط آزیموت لا پلاس در نقطه اولیه است یعنی نسبت دادن مقداری به α_0 بطوریکه شرط زیر برقرار شود:

$$\delta\alpha_0 = A_0 - \alpha_0 = \eta_0 \tan \varphi_0 \quad (2-44)$$

که در آن A_0 آزیموت نجومی مشاهده شده است. اعمال این شرط سبب موازی بودن (دارای یک صفحه قائم بودن) دو صفحه نصف النهاری نجومی و ژئودتیک در نقطه اولیه خواهد بود و همچنین باعث خواهد شد که هر دو محور تقارن در یک صفحه نصف النهاری واقع شوند. البته برقراری این شرط باعث این نخواهد شد که دو محور در این صفحه نصف النهاری لزوما بر هم منطبق شوند و برای ایجاد چنین حالتی بایستی شرط لا پلاس را در مورد نصف نقاط متعدد برقرار نمود یعنی نصف النهارات ژئودتیک و نجومی را در نقاط متعدد به حالت توازی در آورد. در اصل اعمال و تحمیل شرط لا پلاس به مشاهدات بیشتر سبب تصحیح جابجایی های datum خواهد شد تا موازی شدن قطر اقصر آن با محور دورانی زمین. باید توجه نمود که اعمال شرط لا پلاس در سرتاسر شبکه منوط به وجود شبکه تعدیل شده ای است که این نکته مجددا طبیعت تکراری و ترمیمی datum را

نشان می دهد
حمید مجفرازاده
دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

مسئله ای که در ژئودزی غالباً مطرح می شود این است که با داشتن مختصات منحنی الخط یک ایستگاه نسبت به یک datum مختصات منحنی الخط آن نسبت به datum دیگری خواسته می شود.

در تبدیل مختصات از یک datum به datum دیگر دو نکته زیر را باید در نظر داشت:

الف- محل مراکز هندسی هر یک از دو بیضوی نسبت به مرکز ثقل و یا نسبت به یکدیگر باید معلوم باشد.

ب- اختلاف در شکل و اندازه بین آن دو بایستی مشخص باشد.

معمولاً فرض بر این است که محورهای دو بیضوی به موازات محورهای سیستم A.T. است.

دو بیضوی با شکل و اندازه های $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ را در نظر می گیریم (می توان $(a_1, f_1), (a_2, f_2)$ که در آنها $f = \frac{a-b}{a}$ است را بجای $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ بعنوان پارامترهای معرف شکل و اندازه در نظر گرفت) همچنین فرض می کنیم محل مراکز هندسی دو بیضوی نسبت به مرکز ثقل زمین با بردارهای زیر تعریف شوند:

$$(\vec{r}_0)_2 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_2 \quad \text{و} \quad (\vec{r}_0)_1 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_1$$

فرض می کنیم مختصات نقطه ای نسبت به اولین بیضوی $(\varphi_1, \lambda_1, h_1)$ باشد ولی می خواهیم مختصات آن را نسبت به دومین بیضوی که آن را $(\varphi_2, \lambda_2, h_2)$ می نامیم تعیین کنیم.

با مراجعه به معادله ۲-۳۲ می توانیم مختصات A.T. این نقطه را برحسب $(\varphi_1, \lambda_1, h_1)$ بصورت زیر بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{A.T.} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} (N_1 + H_1) \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 \\ (N_1 + H_1) \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 \\ (N_1 \frac{b_1^2}{a_1^2} + h_1) \sin \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

همچنین مختصات A.T. این نقطه بر حسب $(\varphi_2, \lambda_2, h_2)$ را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{A.T.} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_2 + \begin{bmatrix} (N_2 + H_2) \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 \\ (N_2 + H_2) \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 \\ (N_2 \frac{b_2^2}{a_2^2} + h_2) \sin \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

باید دانست که تغییر datum تأثیری در مختصات A.T. نقطه ندارد بنابراین با توجه به مساوی بودن طرف اول این معادلات می توان طرف های دوم آنها را مساوی قرار داد که در اینصورت سه معادله با سه مجهول $(\varphi_2, \lambda_2, h_2)$ را برحسب $(a_1, b_1, a_2, b_2, N_1, N_2, \varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, h_1, h_2)$ که معلومات مسئله هستند بدست خواهند آمد.

دو روش برای تعیین $(\varphi_2, \lambda_2, h_2)$ وجود دارد. اولین روش آن است که مطابق آنچه که در بالا گفته شد مختصات A.T. نقطه را از معادله ۲-۴۵ بر حسب $(\varphi_1, \lambda_1, h_1, \dots)$ یافته و با بکار بردن آن در معادله ۲-۴۶ و معکوس نمودن این معادله، $(\varphi_2, \lambda_2, h_2)$ را با بکار بردن روس تکراری که در ۲-۲-۶ ذکر گردید بدست می آورند.

روش دوم که به روش دیفرانسیل موسوم است وقتی بکار می رود که پارامترهای اختلاف بین دو بیضوی $(\delta a, \delta f, \delta x_0, \delta y_0, \delta z_0)$ به حدی کوچک باشند که بتوان تقریبات خطی سری تیلور را بکار برد. برای انجام این روش باید از معادله ۲-۳۲ با توجه به ثابت بودن مختصات A.T. (صفر بودن مشتق آن)، مشتق کلی گرفت و سپس اختلاف بین دو نوع مختصات نقطه نسبت به دو بیضوی مختلف (مقادیر دیفرانسیلی) را مساوی با اختلاف بین دو بیضوی قرار داد.

مطالب فوق را از نظر فرمولی بصورت زیر می توان بیان نمود:

$$\begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \lambda_2 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \lambda_1 \\ h_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\varphi \\ \delta\lambda \\ \delta h \end{bmatrix}$$

که پس از مشتق گیری از معادله ۲-۳۲ و با در نظر گرفتن معادله ۲-۳۵ یعنی:

$$N = \frac{a}{(\cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{(\cos^2 \varphi + (1-f)^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

روابط دیفرانسیلی زیر بدست خواهند آمد:

$$\begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{bmatrix} + J \begin{bmatrix} \delta\varphi \\ \delta\lambda \\ \delta h \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta f \end{bmatrix} = 0 \quad (2-47)$$

که ماتریس های J, B عبارتند از:

$$J = \begin{bmatrix} -(M+h) \sin \varphi \cos \lambda & -(N+h) \cos \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -(M+h) \sin \varphi \sin \lambda & (N+h) \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ (M+h) \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2-48)$$

$$B = \begin{bmatrix} N \cos \varphi \cos \lambda / a & M \sin^2 \varphi \cos \varphi \cos \lambda / (1-f) \\ N \cos \varphi \sin \lambda / a & M \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin \lambda / (1-f) \\ N (1-f)^2 \sin \varphi / a & (M \sin^2 \varphi - 2N) \sin \varphi / (1-f) \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

که در آن :

$$M = \frac{a(1-f)^2}{(\cos^2 \varphi + (1-f)^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (2-50)$$

و پس از حل معادله خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \delta\varphi \\ \delta\lambda \\ \delta h \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta f \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

که در آن:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda (M+h) & \frac{-\sin \varphi \sin \lambda}{(M+h)} & \frac{\cos \varphi}{(M+h)} \\ \frac{-\sin \lambda}{(N+h) \cos \varphi} & \frac{\cos \lambda}{(N+h) \cos \varphi} & 0 \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2-52)$$

باید توجه داشت که بعلاوه از نزدیکی دو بیضوی یا عبارت دیگر به سبب کوچکی مقادیر اختلافات می توان ماتریس های فوق را نسبت به دو سیستم مختصات بطور دلخواه محاسبه نمود. بعلاوه برای سهولت بیشتر در محاسبات این ماتریس ها، می توان از تقارب کره ای استفاده نمود یعنی $f = 0, N = M = N + h = M + h = a$. جدول ۱-۲ مثالی است راجع به محاسبات تبدیل datum ها و تبدیل مختصات نقطه ای نسبت به datum آمریکای شمالی (N.A.D.) را نسبت به datum اروپا نشان می دهد. در این جدول منظور از datum قدیم (N.A.D.) و منظور از datum جدید، datum اروپاست. هر دو روش تکراری و دیفرانسیلی در این محاسبات بکار رفته اند و اختلاف بین نتایج حدود ۰/۴ متر در عرض جغرافیایی و ۰/۳ متر در طول جغرافیایی و ۰/۲ متر در ارتفاع است.

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

پارامتر	Datum	Datum	مقیاس - قریم
معموم	6378206.4 متر	6378388.0	181.6
افت قطر اطل			
فشرده	1/294.98	1/297.0	-2.3057×10^{-5}
دوری از مرکز زمین	$\begin{cases} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{cases}$	$\begin{cases} -25.8 \\ -64.5 \\ -154.8 \end{cases}$	$\begin{cases} -38.7 \\ -322.9 \\ -213.5 \end{cases}$
نقطات نقطه شده	$\begin{cases} \phi_1 \\ \lambda_1 \\ h_1 \end{cases}$	$\begin{cases} 44.683^\circ N \\ 63.612^\circ W \\ 32.42 \text{ متر} \end{cases}$	$\begin{cases} ? \\ ? \\ ? \end{cases}$
حل بطریق تکراری			
نقطات نقطه شده	$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$	$\begin{cases} 2018917.91 \\ -4067107.25 \\ 4462360.64 \end{cases}$	$\begin{cases} 2018917.91 \\ -4067107.25 \\ 4462360.64 \end{cases}$
در سیستم زمین متر (مدار 95-7)			
نقطات نقطه شده	$\begin{cases} \phi_2 \\ \lambda_2 \\ h_2 \end{cases}$	$\begin{cases} 44.684770^\circ N \\ 63.609752^\circ W \\ -259.73 \text{ متر} \end{cases}$	$\begin{cases} 44.684770^\circ N \\ 63.609752^\circ W \\ -259.73 \text{ متر} \end{cases}$
محل به روش دینامیکی			
تغییر در نصف قطر اطل	δa		181.6
تغییر در فشرده	δf		-2.3057×10^{-5}
تغییر در دوری از مرکز زمین	$\begin{cases} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{cases}$		$\begin{cases} -38.7 \\ -322.9 \\ -213.5 \end{cases}$
نقطات نقطه شده	$\begin{cases} \phi_2 \\ \lambda_2 \\ h_2 \end{cases}$	$\begin{cases} 44.684766^\circ N \\ 63.609790^\circ W \\ -259.92 \text{ متر} \end{cases}$	$\begin{cases} 44.684766^\circ N \\ 63.609790^\circ W \\ -259.92 \text{ متر} \end{cases}$
(مدار 95-7)			

جدول ۱-۲ (مثال راجع به تبدیل دو دیتوم)

۱-۴-۲- سیستم های زمینی توپوستریک

در مقدمه توضیح داده شد که سیستم های توپوستریک ، سیستم هایی هستند که به شرح زیر تعریف می شوند:

الف- مبدأ آنها نقطه ای است نزدیک سطح زمین

ب- صفحه اولیه ، صفحه مماس بر زمین است در نقطه مبدأ

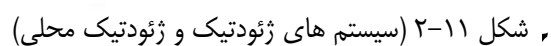
ج- محور اول نقطه شمال است

د- سیستم دست تنظیم است

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
حمید جعفرزاده

سیستم مختصات نجومی محلی ۲-۴-۲

د- محور دوم (محور y) در جهتی است که سیستم مختصات دست چپی باشد.



بردار وضعیت نقطه مورد مشاهداتی مانند L از ایستگاهی بنام k نسبت به یک سیستم L.A. بصورت زیر خواهد بود:

$$(\vec{r}_{kl})_{L.A.} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{L.A.} = r_{kl} \begin{bmatrix} \cos V_{kl} \cos A_{kl} \\ \cos V_{kl} \sin A_{kl} \\ \sin V_{kl} \end{bmatrix} \quad (2-54)$$

در این معادله r_{kl} فاصله فضایی بین دو ایستگاه L و k و A_{kl} و V_{kl} به ترتیب زاویه قائم و آزیموت آنهاست. نکته جالب و مهم رابطه سیستم های مختصات A.T. و L.A. است. به این ترتیب که اگر مختصات نجومی نقطه k و آزیموت خط kl $(\Phi_k, \Delta_k, A_{kl})$ موجود بوده و تصحیح حرکت قطبی نیز به آنها اعمال شده باشد می توان مختصات ایستگاه k را نسبت به سیستم A.T. بر حسب مختصات آن نسبت به سیستم L.A. بوسیله فرمول زیر بدست آورد:

$$(\vec{r}_{kl})_{A.T.} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{A.T.} = R_3(180 - \Lambda_k) R_2(90 - \Phi_k) P_2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{L.A.} \quad (2-55)$$

که ماتریس انعکاس عبارت است از:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-56)$$

و به منظور تبدیل یک سیستم دست چپی به یک سیستم دست راستی اعمال می شود و ماتریس های دورانی R_2, R_3 عبارتند از:

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos(90 - \Phi_k) & 0 & -\sin(90 - \Phi_k) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(90 - \Phi_k) & 0 & \cos(90 - \Phi_k) \end{bmatrix} \quad (2-57)$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos(180 - \Lambda_k) & \sin(180 - \Lambda_k) & 0 \\ -\sin(180 - \Lambda_k) & \cos(180 - \Lambda_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-58)$$

که اثر این دو دوران این است که محورهای دو سیستم را موازی سازند.

معکوس تبدیل 2-55 بصورت زیر است:

$$(\vec{r}_{kl})_{L.A.} = [R_3(180 - \Lambda_k) R_2(90 - \Phi_k) P_2]^{-1} (\vec{r}_{kl})_{A.T.} \quad (2-59)$$

$$(\vec{r}_{kl})_{L.A.} = P_2 R_2(\Phi_k - 90) R_3(\Lambda_k - 180) (\vec{r}_{kl})_{A.T.} \quad (2-60)$$

باید توجه داشت که تا این مرحله بخشی راجع به انتقال مبدأ های مختصات دو سیستم داده نشده است. اگر بردار وضعیت

ایستگاه k نسبت به مرکز ثقل در سیستم A.T. معلوم و با $(\vec{R}_k)_{A.T.}$ نشان داده شود می توان بردار وضعیت کلی $\vec{R}_l$ نقطه l

نسبت به مرکز ثقل در سیستم A.T. را بصورت زیر تعیین کرد:

$$(\vec{R}_l)_{AT.} = (\vec{R}_k)_{AT.} + (\vec{r}_{kl})_{AT.} \quad (2-61)$$

سه بردار یکه $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ سیستم مختصات L.A. دارای مؤلفه هایی نسبت به محورهای مختصات سیستم A.T. به شرح زیر هستند:

$$\hat{u}_x = R_3(180 - \Lambda_k) R_2(90 - \Phi_k) P_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}_x = \begin{bmatrix} -\sin \Phi \cos \Lambda \\ -\sin \Phi \sin \Lambda \\ \cos \Phi \end{bmatrix} \quad (2-62)$$

$$\hat{u}_y = R_3(180 - \Lambda_k) R_2(90 - \Phi_k) P_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}_y = \begin{bmatrix} -\sin \Lambda \\ \cos \Lambda \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-63)$$

$$\hat{u}_z = R_3(180 - \Lambda_k) R_2(90 - \Phi_k) P_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}_z = \begin{bmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{bmatrix} \quad (2-64)$$

سیستم نجومی محلی سیستمی است که برای هر ایستگاه مشاهداتی یکه است (برخلاف سیستم ژئودتیک محلی که بعداً تعریف خواهد شد) و به این دلیل است که مشاهدات سه بعدی در ایستگاه های متعدد را می توان با یک سیستم یکسان محاسباتی به نتیجه رساند (منظور این است که فرمول های ارائه شده برای این سیستم یعنی ۲-۵۴ و ... فرمول های یکه هستند).

سیستم مختصات ژئودتیک محلی ۳-۴-۲

یک سیستم ژئودتیک محلی که اختصاراً با (L.G) نشان داده می شود با مشخصات زیر تعریف می شود:

الف- مبدأ آن نقطه ای است در طول قائم بر بیضوی در نقطه مشاهدات. باید توجه داشت که این نقطه را می توان بطور اختیاری بر روی قائم بیضوی از نقطه مشاهده انتخاب نمود ولی عملاً یکی از نقاط مشاهده، محل برخورد قائم با بیضوی و یا محل تلاقی قائم با ژئوئید بعنوان مبدأ انتخاب می شود.

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
ممید جعفرزاده

ب- قطب اولیه، قائم بر بیضوی و صفحه اولیه، صفحه گذرنده بر مبدأ و عمود بر قطب اولیه می باشد.

ج- محور اول محل تقاطع صفحه اولیه و صفحه گذرنده بر قطر اقصر بیضوی مبدأ است و شمال ژئودزی نامیده می شود.

د- محور Y طوری انتخاب می شود که سیستم دست چپی باشد.

تبدیل بین سیستم های نجومی محلی و ژئودتیک محلی چنانچه در نقطه مبدأ مشترک باشند بر حسب زاویه بین قائم های بر بیضوی و ژئوئید (انحراف قائم) و زاویه بین شمال های نجومی و ژئودتیک امکان دارد.

چنانچه مؤلفه های انحراف قائم بر روی نصف النهار و قائم اولیه یعنی η, ξ و همچنین آزیموت های ژئودتیک و نجومی یعنی A, A نسبت به یک ایستگاه معلوم باشند می توان یک بردار در سیستم $L.A.$ را به برداری در سیستم $L.G.$ بوسیله معادله زیر تبدیل نمود:

$$(\vec{r}_{kl})_{L.G.} = R_3(A-a) R_2(-\xi) R_1(\eta) (\vec{r}_{kl})_{L.A.} \quad (2-65)$$

باید توجه داشت که بعلا کوچک بودن زوایای $\eta, \xi, (A-a)$ ، مرتبه ماتریس های دورانی یعنی جابجایی آنها در فرمول بالا اهمیتی ندارد. همچنین اگر شرط لا پلاس در نقطه مبدأ برقرار شده باشد می توان در این معادله $(A-a)$ را از معادله:

$$A-a = (\Lambda - \lambda) \sin \varphi = \eta \tan \varphi$$
 جایگزین نمود.

اگر مبدأ های مختصات در نقطه مشاهدات نباشد (یعنی در یکی از دو نقطه برخورد قائم بر بیضوی از نقطه مشاهدات با بیضوی یا ژئوئید باشد) بنابراین مرجع بردار وضعیت $\vec{R}_k$ در معادله ۶۱-۲ نقطه مبدأ خواهد بود نه نقطه مشاهدات یعنی اینکه اگر نقطه واقع بر ژئوئید مبدأ اختیار شود در محاسبه (x_k, y_k, z_k) از $(\varphi_k, \lambda_k, N_k)$ استفاده می شود و اگر نقطه واقع بر بیضوی مبدأ مختصات باشد $(\varphi_k, \lambda_k, 0)$ بکار خواهد رفت. باید توجه داشت که وقتی منطقه کوچکی از زمین بعنوان یک صفحه فرض می شود در واقع یک سیستم ژئودتیک محلی در نظر گرفته شده است.

همانند سیستم نجومی محلی در مورد سیستم ژئودتیک محلی نیز روابطی مانند فرمول های ۵۵-۲ و ۵۴-۲ برای تعیین بردار وضعیت از ایستگاه مشاهدات k به ایستگاه مورد مشاهده l بصورت زیر وجود دارد:

$$(\vec{r}_{kl})_{L.G.} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{L.G.} = r_{kl} \begin{bmatrix} \cos \alpha_{kl} \cos \alpha_{kl} \\ \cos \alpha_{kl} \sin \alpha_{kl} \\ \sin \alpha_{kl} \end{bmatrix} \quad (2-66)$$

و

$$(\vec{r}_{kl})_G = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_G = R_3(180 - \lambda_k) R_2(90 - \varphi_k) P_2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{L.G.} \quad (2-67)$$

در این معادلات (a, α, r) به ترتیب عبارتند از: ارتفاع ژئودتیک، آزیموت و طول و (φ, λ) عرض و طول ژئودتیک هستند. سیستم ژئودتیک (G) و سیستم زمینی متوسط $(A.T.)$ بوسیله معادله ۴-۲ یعنی:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_G$$

به یکدیگر مربوط اند.

بردار های یکه سه محور کارتیزین در سیستم ژئودتیک محلی عبارتند از:

$$\hat{u}_x = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2-68a)$$

$$\hat{u}_y = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-68b)$$

$$\hat{u}_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2-68c)$$

۲-۵- خلاصه سیستم های زمینی

در این بخش پنج سیستم زمینی بطور دقیق به شرح زیر تعریف و تشریح گردید:

۱- سیستم زمینی متوسط ($A.T.$)

۲- سیستم زمینی لحظه ای ($I.T.$)

۳- سیستم ژئودتیک (G)

۴- سیستم نجومی محلی ($L.A.$)

۵- سیستم ژئودتیک محلی ($L.G.$)

که سه سیستم نخست سیستم های ژئوستتیک و دو سیستم آخر توپوستتیک می باشند. جدول ۲-۲ شامل صفحات، قطب ها و محورهایی است که در تعریف پنج سیستم مختصات فوق بکار رفته اند. در این بخش همچنین چهار نوع مختصات بطور دقیق به شرح زیر تعریف شد:

۱- مختصات کارتیزین (x, y, z) که در تمام سیستم ها بکار می رود

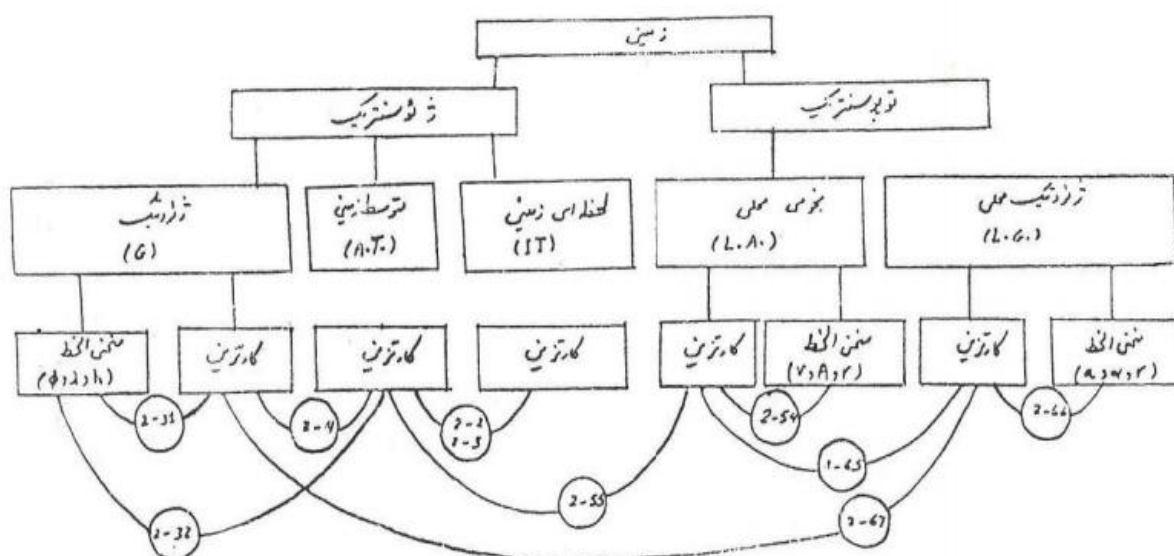
۲- مختصات منحنی الخط (φ, λ, h)، این مختصات در سیستم های ژئودتیک بکار می روند

۳- مختصات منحنی الخط (V, A, r)، این مختصات در سیستم های نجومی محلی بکار می روند

۴- مختصات منحنی الخط (a, α, r) که در سیستم های ژئودتیک محلی بکار می روند

و بالاخره تبدیلین بخش اصول تبدیلات بین این مختصات و سیستم های مختصات توضیح داده شد. شکل ۱۲-۲ حاوی شماره معادلات است که در تعریف این تبدیلات از آنها استفاده گردیده و همچنین این تبدیلات در جدول ۲-۳ بطور خلاصه شرح داده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
ممید جعفرزاده



شکل ۱۲-۲ (معادلات مربوط به سیستم های زمینی)

سیستم	قطب های مرجع		صفحات مرجع		جهت
	اولیه (عدد ۲)	ثانویه (عدد ۳)	اولیه عمود بر قطب اولیه	ثانویه	
زمین متوسط	قطب متوسط زمین (CIO)	۱	استوای متوسط زمین گذرنده بر مرکز ثقل زمین	نصف النهار متوسط گرینویچ	دست راست
زمین خطای	قطب خطای زمین	۱	استوای خطای زمین	نصف النهار متوسط گرینویچ	دست راست
ژئوایستاتیک	نصف النهار (بروزات قطب زمین)	۱	بروزات استوای متوسط زمین	بروزات نصف النهار متوسط گرینویچ	دست راست
نجومی	تأمین برزخ زمین در استیلا ملاحظات	۱	افق محل	نصف النهار نجومی ملاحظات	دست چپ
توپوایستاتیک	تأمین برزخ زمین در استیلا ملاحظات	۱	صفحه برای	منطبق بر نصف النهار ژئوایستاتیک استیلا ملاحظات	دست چپ

۲-۲ (قطب ها، صفحات و محورهای مرجع که در تعریف سیستم های مختصات زمینی بکار می روند)

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

سیستم اولی					
ژئودتیک-معی	نجومی-معی	ژئودتیک	زمینی-خطای	زمینی-مترس	
از طریق ژئودتیک	$R_3(180^\circ - \lambda) R_2(90^\circ - \beta) P_2$	$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$	$R_2(-\alpha_p) R_1(-\gamma_p)$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{A.T.}$	زمینی-مترس
از طریق سیستم ژئودتیک	از طریق سیستم زمینی-مترس	از طریق سیستم زمینی-مترس	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{IT}$	$R_1(\gamma_p) R_2(\alpha_p)$	زمینی-خطای
از طریق سیستم ژئودتیک-معی	$R_3(180^\circ - \lambda) R_2(90^\circ - \beta) P_2$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_c$	از طریق سیستم زمینی-مترس	$-\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$	ژئودتیک
$R_2(+\beta) R_1(+\gamma)$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{L.A.}$	از طریق سیستم ژئودتیک	از طریق سیستم زمینی-مترس	$P_2 R_2(\beta - 90^\circ) R_3(\lambda - 180^\circ)$	نجومی-معی
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{L.G.}$	$R_1(-\gamma) R_2(-\beta)$	$P_2 R_2(\beta - 90^\circ) R_3(\lambda - 180^\circ)$	از طریق سیستم زمینی-مترس	از طریق سیستم ژئودتیک	ژئودتیک

جدول ۳-۲ (تبدیلات بین سیستم های مختصات زمینی)

بخش دوم: محاسبات تعیین مختصات

مقدمه

سه قسمت نخست این بخش مربوط خواهد بود به محاسبات مختصات ژئودتیک روی یک بیضوی. در فصل اول مروری خواهد شد به هندسه بیضوی و منظور از این مرور تفهیم فرمول های بعدی است. بعلا اینکه در تمام محاسبات کلاسیک بر روی بیضوی تبدیل مشاهدات ژئودتیک به سطح بیضوی لازم است یک فصل کامل به این موضوع اختصاص خواهد یافت.

در محاسبات کلاسیک هندسی ژئودتیک دو مسئله مورد توجه است که به مسائل ژئودتیک مستقیم و معکوس معروفند و طرق مختلفی برای حل این مسائل وجود دارد که عموماً بعنوان فرمول های خطوط کوتاه، متوسط و بلند طبقه بندی شده اند. هر یک از یک از این فرمول ها دارای تقریبی یا دقتی متناسب با طول بین ایستگاه ها است.

در قسمت آخر این بخش محاسبات مختصات ژئودتیک در فضای سه بعدی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. ابتدا مسائل مستقیم و معکوس و سپس دو مسئله خاص یعنی مسائل آزمون و تقاطع در این فضا مطرح خواهند کردید.

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

(۱) بیضوی دورانی

نظر به اینکه بیضوی دورانی بعنوان نزدیکترین شکل هندسی به فرم زمین است محاسبات زمینی ژئودتیک ب روی این سطح انجام می گیرد. در زیر خصوصیات مختلف هندسی یک بیضوی دورانی را تا آنجا که مربوط به ژئودزی است مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهیم داد.

۱-۱- پارامترهای بیضوی

در شکل ۱-۱ یک بیضوی دورانی نشان داده شده است. پارامترهایی که یک بیضوی دورانی (بیضوی مرجع یا مقایسه) را مشخص می کنند پارامترهایی هستند که بوسیله آنها پی به اندازه و شکل آن بیضوی می بریم و عبارتند از:

الف- نصف قطر اطول بیضوی (a)

ب- نصف قطر اقصر بیضوی (b)

معادله هر منحنی نصف النهار بصورت $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ (۱-۱) و معادله یک بیضوی دورانی بصورت (۱-۱a)

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \text{ است.}$$

نقاط F, F' در شکل ۱-۱ کانون های بیضی نصف النهار گذرنده بر نقاط P, E', P', E می باشند. این کانون ها بفواصل مساوی از مرکز هندسی بیضوی (O) واقع اند. همچنین فواصل PF, PF' با نصف قطر اطول (a) برابرند.

فشرده بیضوی با فرمول زیر تعیین می شود:

$$f = \frac{a-b}{a} \quad (1-2)$$

دو خصوصیت مهم دیگر یک بیضوی عبارتند از اولین و دومین خارج از مرکزیت که به ترتیب به فرمول های

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (1-3)$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad (1-4)$$

بیان می شوند.

بعنوان مثالی نشان دهنده حدود بزرگی این پارامتر ها باشد بیضوی مقایسه کلاسیک ۱۸۶۶ را در نظر می گیریم. این بیضوی در حال حاضر برای محاسبات ژئودتیک مورد استفاده قرار می گیرد:

$$a = 63783206.4$$

$$b = 6356583.8$$

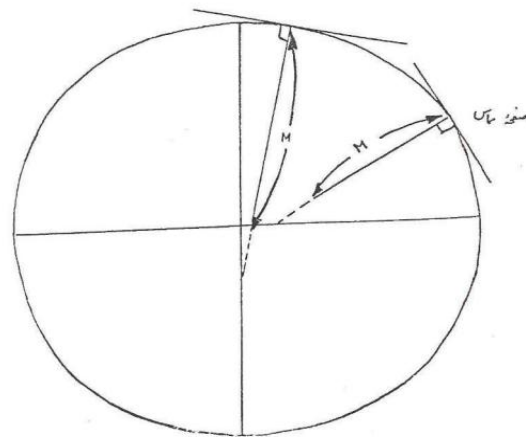
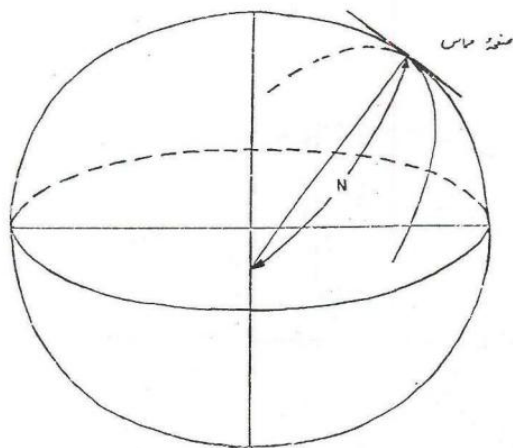
تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

که غالباً بصورت $\frac{1}{f}$:

۴۴



شکل ۱-۳ (مقطع قائم اولیه و شعاع انحناء آن)

شکل ۱-۲ (مقطع نصف النهار و شعاع انحناء آن)

۱-۲-۱ - شعاع انحناء نصف النهار

مقطع نصف النهاری از بیضوی دورانی با فرمول زیر را در نظر می گیریم: (شکل ۱-۴)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (1-5)$$

شعاع انحناء این منحنی در هر نقطه ای مانند P با فرمول زیر بدست می آید:

$$M = \frac{(1 + (\frac{dz}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{dx^2}} \quad (1-6)$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z} \cdot \frac{b^2}{a^2} \quad (1-7)$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{z - x \frac{dz}{dx}}{z^2} \right) \quad (1-8)$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2 z^2} \left(z + \frac{x^2}{z} \cdot \frac{b^2}{a^2} \right) \quad (1-8a)$$

همچنین با مراجعه به شکل ۱-۴ می بینیم که شیب خط مماس در P را می توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$\tan(90^\circ + \varphi) = \frac{dz}{dx} = -\cot \varphi \quad (1-9)$$

و یا با مساوی قرار دادن روابط (۱-۷) و (۱-۹) خواهیم داشت:

$$-\cot \varphi = -\frac{z}{x} \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

تهیه و تنظیم:
(۱۰) ممید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$\tan \varphi = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{z}{x}$$

و یا (۱-۱۰a)

با جایگذاری (۱-۱۰b) $b = a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$ در معادله (۱-۱۰a) خواهیم داشت:

$$z = x(1-e^2) \tan \varphi \quad (1-11)$$

بعد از جایگزین کردن z, b از معادله ۱-۵ با مقادیر (۱-۱۰b) و (۱-۱۱)، رابطه زیر بدست می آید:

$$x = \frac{a \cos \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (1-12)$$

که پس از قرار دان x از این معادله در رابطه ۱-۱۱ خواهیم داشت:

$$z = \frac{a(1-e^2) \sin \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (1-13)$$

و بالاخره با جایگذاری x, z از معادلات (۱-۸a) و (۱-۷) در روابط (۱-۱۲) و (۱-۱۳) و سپس با قرار دادن $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{dz}{dx}$ بدست آمده در معادله ۱-۶، مقدار M بصورت زیر تعیین خواهند شد:

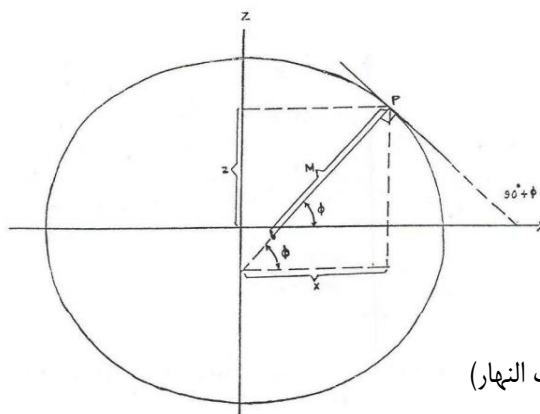
$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (1-14)$$

در معادله بدست آمده تنها پارامتر متغیر عرض ژئودتیک φ است. بنابراین:

$$M = a(1-e^2) \quad \checkmark \text{ در استوا } (\varphi = 0) \quad (1-14a)$$

$$M = \frac{a}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \checkmark \text{ و در قطب } (\varphi = 90) \quad (1-14b)$$

خواهد بود و بطوریکه از این دو معادله واضح است، طول شعاع انحناء نصف النهار به نسبتی که نقطه ای واقع بر روی نصف النهار از استوا به طرف قطب نزدیک می شود تدریجاً اضافه می گردد.



تهیه و تنظیم
شکل ۱-۴ (انحناء نصف النهار)
حمید جعفرزاده
دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

از شکل ۱-۵ داریم:

$$\cos \varphi = \frac{x}{N} \quad (1-15)$$

$$N = \frac{\cos \varphi}{x} \quad \text{و یا } (15-a)$$

با قرار دادن x از معادله (۱-۱۲) در معادله (۱۵a) شعاع انحناء قائم اولیه بصورت زیر بدست می آید:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (1-16)$$

واضح است که تنها پارامتر متغیر در رابطه فوق φ است. بنابراین N با تغییر φ تغییر می کند:

$$N = a \quad \checkmark \text{ در استوا } (\varphi = 0) :$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} = M \quad \checkmark \text{ و در قطب } (\varphi = 90) : (1-16a)$$

خواهد بود.

یک کمیت مهم که اغلب در محاسبات ژئودزی بکار می رود شعاع انحناء گوس است که با معادله زیر تعیین می شود:

$$R = \sqrt{MN} \quad (1-17)$$

برای محاسبات تعیین مختصات در بسیاری از موارد شعاع متوسط که از فرمول فوق محاسبه می شود دارای دقت کافی است.

شعاع انحنای دیگری که آن هم اغلب در محاسبات تعیین موقعیت بکار رفته و از آن صحبت می شود شعاع انحناء مدار در عرض جغرافیایی داده شده است. هر مداری از منظر قطب شمال بیضوی (محور Z) به شکل دایره ای است که شعاع آن با توجه به شکل ۱-۵ برابر است با x در سیستم مختصات $x-Z$ در صفحه نصف النهار. بنابراین از معادله (۱-۱۵a)، شعاع انحناء مدار در عرض جغرافیایی φ را بصورت زیر خواهیم داشت:

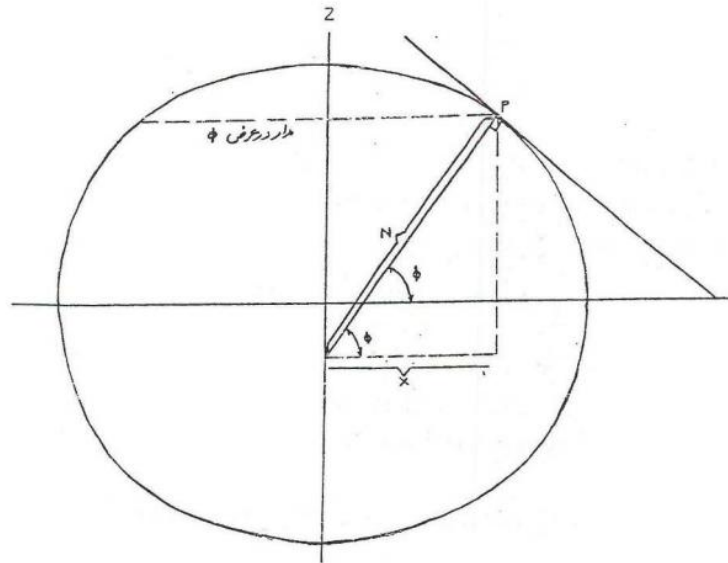
$$R_{\varphi} = N \cos \varphi \quad (1-18)$$

از فرمول بالا به سادگی دیده می شود که وقتی $(\varphi = 0)$ است: $R_{\varphi} = N$ و بنابراین $R_{\varphi} = a$. و در هر یک از قطبین $(\varphi = 90)$ ، $R_{\varphi} = 0 \rightarrow \cos \varphi = 0$ می باشد.

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

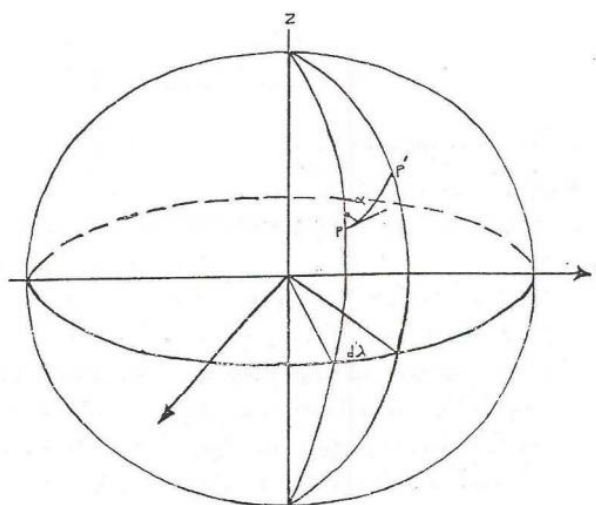


شکل ۱-۵ (شعاع انحناء قائم اولیه)

۱-۲-۳- شعاع انحناء در یک آزیموت اختیاری

بطوریکه در بخش های ۱-۲-۱ و ۱-۲-۲ دیده شد شعاع های انحناء ماکزیمم و مینیمم در هر نقطه ای مانند P واقع بر سطح بیضوی دورانی در صفحات نصف النهار و قائم اولیه این نقطه قرار دارند. در بعضی از موارد در محاسبات ژئودتیک لازم است که شعاع انحناء در صفحه ای غیر از این دو صفحه اصلی معلوم م باشد (شکل ۱-۶). مقطع قائم در آزیموتی مانند α در نقطه ای مانند P دارای شعاع انحنایی است که با R_α نشان داده می شود و شعاع انحناء اولر نامیده می شود.

در شکل ۱-۶، نقطه P که در آن شعاع R_α را می خواهیم تعیین کنیم بر روی سطح قائم PP' نشان داده شده است. باید توجه داشت که بر روی این شکل قسمت کوچکی از سطح قائم (ds) نمایش داده شده است زیرا واضح است که آزیموت α این قسمت کوچک برابر است با آزیموت مقطع قائم در هر طولی.



شکل ۱-۶ (مقطع قائم در آزیموت α)

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

شعاع انحنای اولر در نقطه ای مانند P به این طریق تعیین می شود که ابتدا صفحه مماس بر بیضوی در این نقطه و همچنین صفحه ای به موازات این صفحه مماس که آن را صفحه BB' می نامیم رسم می شوند. مقطع صفحه اخیر با سطح بیضوی از منظر قائم بر بیضوی در P یک بیضی است. عامل متشکله این مسئله در شکل ۱-۷ نشان داده شده است. چنانچه به این صفحه در نقطه P' از منظر زاویه آزیموت α نگاه شود بصورت شکل ۱-۸ دیده خواهد شد. یاد آوری می شود که معادله یک بیضی بصورت:

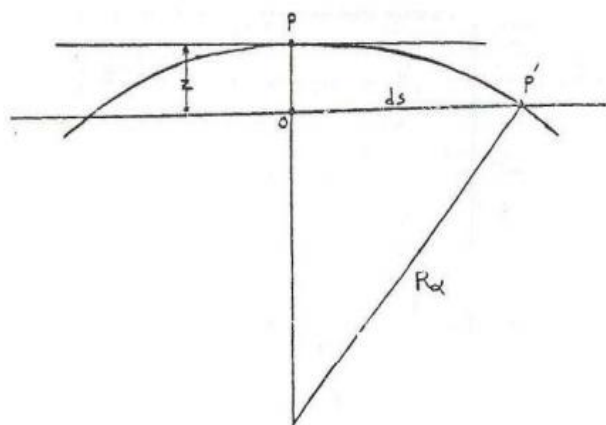
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (1-19)$$

است. با مراجعه به شکل ۱-۷ خواهیم داشت:

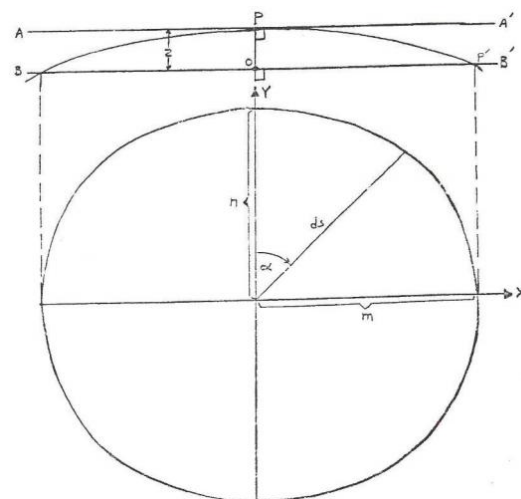
$$\begin{aligned} x &= ds \sin \alpha \\ y &= ds \cos \alpha \end{aligned} \quad (1-20)$$

بنابراین:

$$\frac{ds^2 \sin^2 \alpha}{m^2} + \frac{ds^2 \cos^2 \alpha}{n^2} = 1 \quad (1-21)$$



شکل ۱-۸



شکل ۱-۷

با استفاده از شکل ۱-۹ می توانیم بنویسیم:

$$\sin \theta = \frac{z}{c} \quad (1-22)$$

$$\sin \theta = \frac{\frac{1}{2}c}{R_\alpha} \quad (1-23) \text{ و}$$

تهیه شده با مقایسه دو معادله فوق:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$z = \frac{c^2}{2R_\alpha} \quad (1-24)$$

چون PP' فاصله بسیار کوچکی است بنابراین $c \approx ds$ و می توانیم بنویسیم:

$$z = \frac{ds^2}{2R_\alpha} \quad (1-25)$$

اگر $\alpha = 0$ باشد $ds = n$ خواهد بود و

$$z = \frac{n^2}{2M} \quad (1-26)$$

و در حالت $\alpha = 90^\circ$ ، $ds = m$ است و

$$z = \frac{m^2}{2M} \quad (1-27)$$

با ترکیب روابط (1-26)، (1-25) و (1-27) خواهیم داشت:

$$n^2 = \frac{ds^2}{R_\alpha} M \quad (1-28)$$

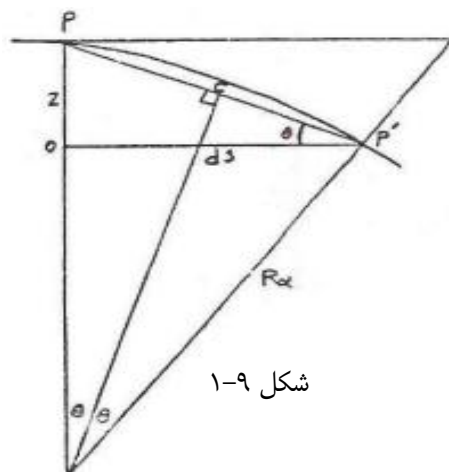
$$m^2 = \frac{ds^2}{R_\alpha} N \quad (1-29) \text{ و}$$

با قرار دادن n^2, m^2 در معادله (1-21)، معادله زیر بدست می آید:

$$\frac{R_\alpha \sin^2 \alpha}{N} + \frac{R_\alpha \cos^2 \alpha}{M} = 1 \quad (1-30)$$

که می توان آن را به شکل معادله زیر که همان شعاع انحناء اولر است نوشت:

$$R_\alpha = \frac{MN}{M \sin^2 \alpha + N \cos^2 \alpha}$$



شکل ۹-۱

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

از هر دو نقطه واقع بر روی یک بیضوی بی نهایت خم می گذرد. بین این بی نهایت خم، دو خم در ژئودزی هندسی دارای اهمیت خاصی هستند. این دو خم عبارتند از: مقطع قائم و ژئودزیک گذرنده بر دو نقطه که در زیر شرح داده خواهند شد.

۱-۳-۱- مقطع قائم

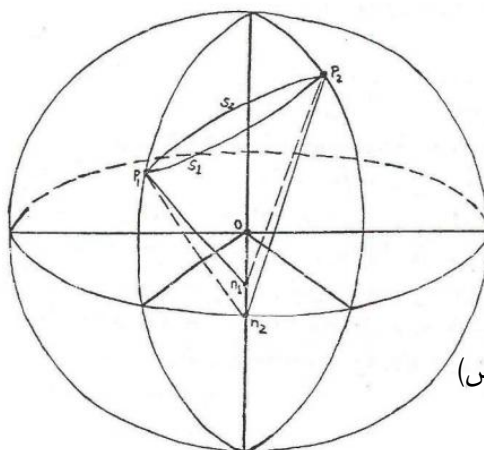
در بخش ۱-۲ مقطع قائم بعنوان منحنی حاصل از تقاطع یک صفحه قائم در نقطه ای مانند P با رویه بیضوی تعریف شد. حال چنانچه دو نقطه P_1, P_2 غیر از واقع بر یک نصف النهار و در عرض های مختلف بر روی یک بیضوی در نظر بگیریم، خواهیم دید که مقطع قائم از P_1 به P_2 که آن را مقطع قائم مستقیم می نامیم بر مقطع قائم از P_2 به P_1 (مقطع قائم معکوس) منطبق نیست (شکل ۱-۱۰).

صفحه قائم گذرنده بر مقطع قائم مستقیم (صفحه $P_1 n_1 P_2$) شامل قائم بر بیضوی در P_1 و نقطه P_2 و صفحه قائم گذرنده بر مقطع قائم معکوس (صفحه $P_2 n_2 P_1$) شامل قائم بر بیضوی در P_2 و نقطه P_1 است. اگر دو مقطع $P_1 P_2, P_2 P_1$ بر هم منطبق باشند لازم می شود که قائم های $P_1 n_1$ و $P_2 n_2$ در صفحات نصف النهارشان یکدیگر را در نقطه ای واقع بر محور اقصر بیضوی قطع نمایند یعنی محل برخورد شان با این محور بر هم منطبق باشد ولی با توجه به فرمول زیر که آن را بدون اثبات می پذیریم:

$$z_n = \frac{ae^2 \sin \varphi_p}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_p)^{\frac{1}{2}}} \quad (1-31)$$

خواهیم دید که نقاطی که دارای عرض های مختلف هستند محل برخورد شان با محور اقصر بیضوی که نشان دهنده z آن نقاط است بر هم منطبق نخواهند بود.

اگر دو نقطه P_1, P_2 دارای طول های مختلف و $\varphi_{p_1} < \varphi_{p_2}$ باشد (شکل ۱-۱۰) $z_{n_1} < z_{n_2}$ و قائم های $P_1 n_1$ و $P_2 n_2$ خطوط متنافر خواهند بود ولی چنانچه دو نقطه P_1, P_2 بر یک مدار واقع باشند $\varphi_{p_1} = \varphi_{p_2}$ ، مقاطع قائم مستقیم و معکوس بر هم منطبق خواهند شد. در حالتی که دو نقطه P_1, P_2 بر روی یک نصف النهار باشند قائم های این دو نقطه همدیگر را در روی محور اقصر قطع نمی نمایند ولی در چنین حالتی نیز مقاطع قائم مستقیم و معکوس بر هم منطبق خواهند بود که این صفحه همان نصف النهار گذرنده بر دو نقطه می باشد.

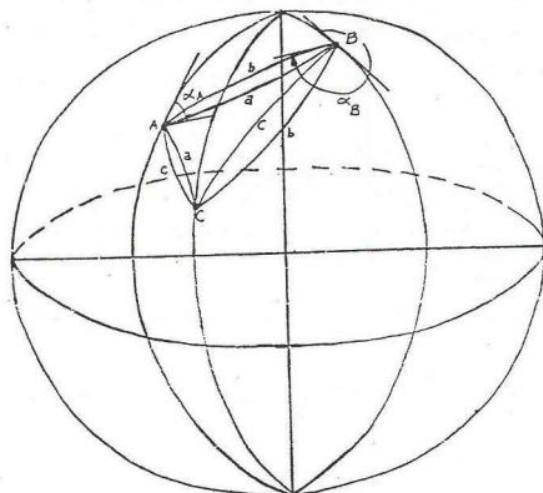


شکل ۱-۱۰ (مقاطع قائم مستقیم و معکوس)

نمیه
شکل ۱-۱۰ (مقاطع قائم مستقیم و معکوس)
ممید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

با توجه به توضیح فوق روشن است که مقاطع قائم (مقاطع قراولروی در عملیات زمینی) یک خط واحدی را بین دو نقطه در حالت بدست نمی دهد بنابراین یک مثلث بیضوی واحد را نمی توان با استفاده از مقاطع قائم تعریف نمود. در شکل ۱۱-۱ می بینیم که مقطع قائم مستقیم از A به B یعنی AaB بر مقطع قائم معکوس BbA منطبق نیست و بنابراین مرجع آزمون های ژئودتیک α_A, α_B منحنی واحدی نیست و همین مسئله در مورد آزمون های از A به C و از B به C و غیره نیز وجود دارد.



شکل ۱۱-۱ (مثلث های حاصل از مقاطع قائم دو طرفه)

اکنون بطور اختصار میزان اختلاف بین مقاطع قائم مستقیم و معکوس را مورد بررسی قرار می دهیم. در شکل ۱۲-۱ این اختلاف با زاویه Δ نشان داده شده که اندازه آن بر حسب ثانیه با فرمول زیر (بدون اثبات) تعیین می شود:

$$\Delta'' = \rho'' \left(\frac{1}{4} e^2 \sigma^2 \cos^2 \varphi_m \sin 2\alpha_{p_{12}} \right) \quad (1-32)$$

در این فرمول: $\varphi_m = \frac{\varphi_{p_1} + \varphi_{p_2}}{2}$ و $\sigma \approx \frac{s}{Nm}$ و $Nm = \frac{N_1 + N_2}{2}$ است.

برای مثال چنانچه فاصله $P_1P_2 = 200km$ باشد و $\alpha_{p_{12}} = 45^\circ, \varphi_m = 0$ (شرط ماکزیمم)، در چنین حالتی $\Delta = 0.36''$ خواهد بود. با توجه به اینکه در خطوط مثلث بندی، پیمایش ها اغلب طول ها کوچکتر از چنین طولی و همچنین احتمال وقوع شرایط ماکزیمم بسیار ناچیز است مقدار Δ عموماً خیلی کوچک و در بسیاری از موارد عملاً قابل صرف نظر کردن می باشد.

۱-۳-۲ ژئودزیک

ژئودزیک یا خط ژئودتیک عبارت است از منحنی یکه واحدی که بعنوان فاصله بین هر دو نقطه واقع بر سطح بیضوی تعریف و تعیین می شود. یک ژئودزیک دارای این خاصیت است که در هر نقطه واقع بر آن بردار شعاع انحناء اصلی بر قائم بر بیضوی در آن نقطه بر هم منطبق اند. ژئودزیک بین P_1, P_2 (شکل ۱۳-۱) کوتاهترین فاصله بین این دو نقطه است. در این شکل وضعیت ژئودزیک نهیست به مقاطع مستقیم و معکوس نشان داده شده است.

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

برای توضیح ریاضی ژئودزیک لازم است معادلات دیفرانسیل خطوط ژئودتیک بر روی یک سطح دورانی مورد مطالعه قرار گیرد. در این بحث اطلاعات اولیه در هندسه دیفرانسیل دانسته فرض می شود. بطور کلی معادله یک سطح دورانی را می توان بصورت زیر نوشت:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1-33)$$

معادله پارامتریک یک ژئودزیک واقع بر این سطح عبارت است از:

$$\begin{aligned} x &= f_1(s) \\ y &= f_2(s) \\ z &= f_3(s) \end{aligned} \quad (1-34)$$

همچنین کسینوس های قائم بر سطح عبارتند از:

$$\cos \beta_1 = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{D}, \cos \beta_2 = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{D}, \cos \beta_3 = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{D} \quad (1-35)$$

که در آن:

$$D = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1-36)$$

کسینوس های هادی قائم اصلی منحنی (1-34) به ترتیب زیر بدست می آیند:

$$\cos \beta_{N_1} = R \frac{d^2 x}{ds^2}, \cos \beta_{N_2} = R \frac{d^2 y}{ds^2}, \cos \beta_{N_3} = R \frac{d^2 z}{ds^2} \quad (1-37)$$

که در آن R شعاع انحنا اصلی سطح است.

در تعریف ژئودزیک این نکته ذکر گردید که در هر نقطه ای از یک چنین خمی قائم بر سطح منطبق بر بردار شعاع اصلی (قائم اصلی) است. این خاصیت با فرض تساوی معادلات (1-37) و (1-35) بر قرار خواهد شد:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{d^2 x}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{d^2 y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{d^2 z}{ds^2}} \quad (1-38)$$

در ژئودزی سطح مورد استفاده بیضوی دورانی است که معادله آن را می توان بصورت:

$$x^2 + y^2 + f(z) = 0 \quad (1-39)$$

نوشت، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \frac{\partial F}{\partial z} = f'(z)$$

تهیه و تنظیم:
(۴۰) حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

که پس از قرار دادن این مقادیر در معادله ۱-۳۸ معادله دیفرانسیل زیر حاصل خواهد شد:

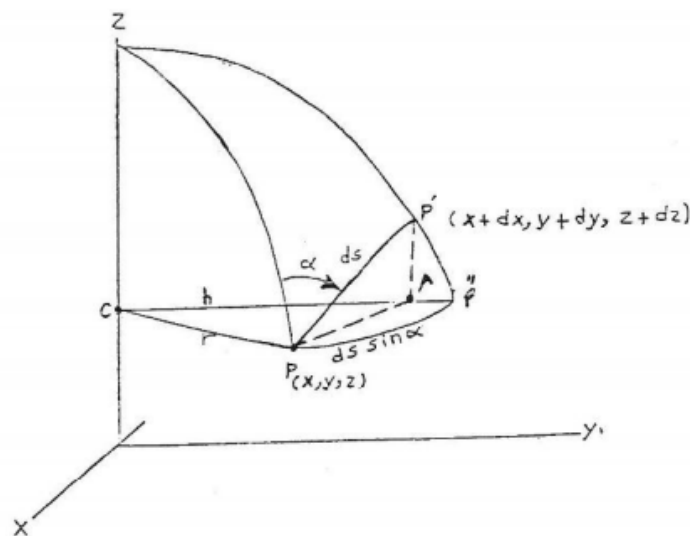
$$y \frac{d^2 x}{ds^2} + x \frac{d^2 y}{ds^2} = 0 \quad (1-41)$$

و پس از انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$y dx - x dy = c ds \quad (1-42)$$

که c ثابت انتگرال گیری است.

در شکل ۱-۱۴، خط PP' نمایشگر یک قسمت کوچک از یک ژئودزیک واقع بر سطح بیضوی است. با معلوم بودن مختصات کارترین (x, y, z) نقطه P ، می توان مختصات نقطه P' را $(x+dx, y+dy, z+dz)$ دانست زیرا ds ، فاصله بسیار کوچکی است. مختصات نقطه A که تصویر P' بر روی صفحه مدار در عرض ژئودتیک P است برابر است با: $(x+dx, y+dy, z)$. شعاع این مدار با r نشان داده می شود. سطح مثلث CPA را می توان با فرمول (۱-۴۳) بدست آورد.



شکل ۱-۱۴

با مراجعه به هندسه تحلیلی با آنالیز برداری خواهیم دید که سطح متوازی الاضلاعی که دو ضلع کوچک و بزرگ آن PA, CP باشد از رابطه زیر حساب می شود:

$$|CP \wedge AP| = CP \cdot AP \cdot \sin \alpha = \begin{vmatrix} y & dy \\ x & dx \end{vmatrix} = y dx - x dy$$

مساحت مثلث فوق نصف مساحت این متوازی الاضلاع است و بنابراین رابطه ۱-۴۳ محقق است. همچنین با توجه به مفروضات بالا مساحت دایره $PP'C$ را می توان حساب کرد:

$$PP'C = \frac{1}{2} r ds \sin \alpha$$

با توجه به اینکه ds بی نهایت کوچک است:

$$CPA = PP''C$$

و بنابراین

$$\frac{1}{2}(ydx - xdy) = \frac{1}{2}rds \sin \alpha \quad (1-45)$$

و با قرار دادن ۱-۴۲ در ۱-۴۵ خواهیم داشت:

$$Cds = \frac{1}{2}rds \sin \alpha \quad (1-46)$$

و یا

$$r \sin \alpha = C \quad (1-47)$$

و بالاخره با استفاده از معادله ۱-۱۸ در ۱-۴۷ رابطه زیر که در مورد هر نقطه ای از یک ژئودزیک واقع بر یک بیضوی دورانی صادق است بدست می آید:

$$N \cos \varphi \sin \alpha = C \quad (1-48)$$

در محاسبات ژئودزی هندسی لازم است که آزیموت های مستقیم و معکوس نسبت به یک منحنی تعریف شوند ولی همانطور که قبلا نیز ذکر شد عملا مشاهدات زاویه ای نسبت به مقاطع قائم مستقیم و معکوس انجام می گیرند.

بنابراین بایستی میزان اختلاف بین ژئودزیک و مقطع قائم معین شود. میزان این اختلاف که بدون اثبات در اینجا ذکر خواهد شد با رابطه:

$$\delta = \frac{\Delta}{\varepsilon} \quad (1-49)$$

تعیین می شود. δ زاویه بین مقطع قائم مستقیم و ژئودزیک در هر نقطه و Δ زاویه بین مقاطع مستقیم و معکوس بین دو نقطه است. در قسمت ۱-۱-۲ با تفصیل بیشتری در مورد این تصحیح بحث خواهد شد.

همچنین فاصله حساب شده بین دو نقطه با استفاده از یکی از مقاطع قائم بین آنها با فاصله حساب شده با بکار بردن ژئودزیک بین آنها اختلافی خواهد داشت که می توان آن را با رابطه زیر تعیین نمود:

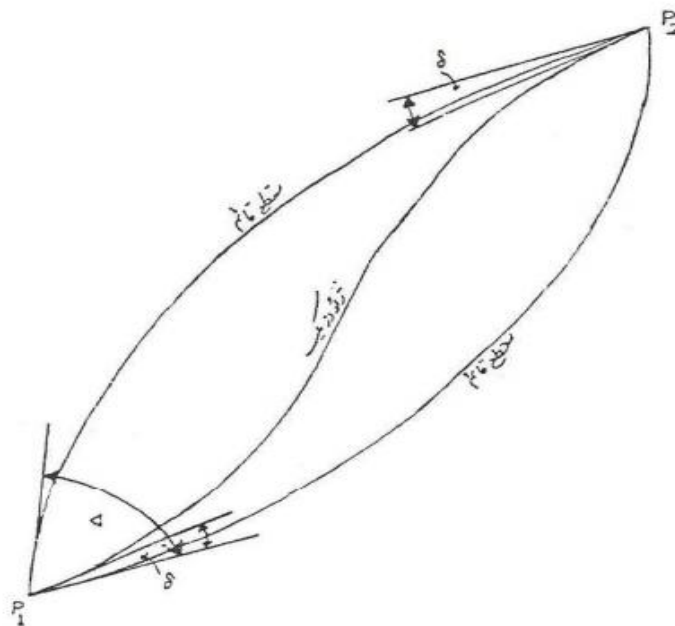
$$\Delta s = \frac{ae^4}{360} \sin^2 2\alpha_{12} \cos^4 \varphi_m \sigma^5 \quad (1-50)$$

که برای یک طول ۶۰۰ کیلومتری میزان این تصحیح تقریباً $9 \times 10^{-6} m$ می باشد. واضح است که در تمام عملیاتی که در ژئودزی انجام می گیرد این تصحیح قابل صرف نظر کردن است.

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز



شکل ۱-۱۵

قسمت دوم: تبدیل مشاهدات ژئودزیک زمینی به سطح بیضوی مقایسه

(۲)

اندازه گیری ها و مشاهدات ژئودزی (امتداد ها ، فواصل و فواصل سمت الرأسی) در روی سطح زمین انجام می گیرند ولی محاسبات موقعیت ها و مختصات ژئودتیک بر روی سطح بیضوی مقایسه انجام می شوند بنابراین این اندازه گیری ها باید از سطح زمین به سطح بیضوی مقایسه تبدیل شوند. در تبدیل کمیت های مشاهده شده دو نوع تصحیح یا تأثیر بایستی مورد مطالعه قرار گیرد: یکی تأثیرات هندسی و دیگری تأثیر تغییرات حوزه ثقل زمین بر روی مشاهدات با تأثیرات فیزیکی.

باید توجه داشت که این تبدیلات را می توان بالعکس نیز انجام داد بدین معنی که با داشتن کمیت های محاسبه شده بر روی بیضوی (مثلا فواصل) می توان آن ها را به کمیت هایی واقع بر سطح زمین تبدیل نمود.

۱-۲- تبدیل امتداد ها و یا زوایای افقی

وقتی امتدادهایی بر روی سطح زمین مشاهده می شوند سعی می شود دستگاه تئودولیت تراز شود. مفهوم علمی تراز شدن دستگاه این است که محور قائم آن منطبق بر بردار ثقل ایستگاه مشاهدات باشد. از طرف دیگر می دانیم که این بردار منطبق بر قائم بر بیضوی که محاسبات ژئودزی بر روی آن انجام می گیرد نیست، این اختلاف که ناشی از تأثیر فیزیک زمین بر روی مشاهدات می باشد همان تصحیح انحراف قائم است که آن را تأثیر فیزیکی می نامیم که بایستی به مشاهدات اعمال نمود تا قائم بر سطح هم پتانسیل در ایستگاه مشاهدات تبدیل به قائم بر بیضوی در آن نقطه شود.

تصحیحات دیگر، همانگونه که در بالا اشاره شد ناشی از تأثیرات هندسی می باشند که معلول هندسه بیضوی هستند. این تصحیحات دو نوع اند: یکی تصحیح به علت ارتفاع نقطه مورد قراولروی که علت آن متنافر بودن قائم های بر سطح بیضوی در نقاط مختلف آن است و تصحیح متنافر قائم ها نامیده می شود و دیگری تصحیح تبدیل مقطع قائم به ژئودزیک است.

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
ممید جعفرزاده

در شکل ۱-۲، P_1 تصویر قائم نقطه زمینی p_1 بر روی بیضوی و p_2 نقطه مورد مشاهده و P_2 تصویر قائم آن بر روی بیضوی است. قائم های بر بیضوی در نقاط p_1 و p_2 محور دورانی بیضوی را در نقاط Q, R قطع نموده اند. خط QP_2 را رسم نموده و آن را تا p_2 امتداد می دهیم بطوریکه $P_2p_2 = h_2$ شود (h_2 ارتفاع نقطه p_2 از سطح بیضوی است). P_1C مداری است به عرض ژئودزیک نقطه P_1 بطوریکه $CP_2 = \Delta\phi$ اختلاف بین عرض های ژئودزیک نقاط P_1 و P_2 است). با توجه به این فرضیات می توان نتیجه گرفت که مقدار تصحیح برابر است با $p_1p_2 \frac{\sin a_{21}}{L}$ (L فاصله بین دو ایستگاه p_1 و p_2 است). باید توجه داشت که علت دخالت عامل $\sin a_{21}$ در این تصحیح این است که نقطه p'_2 در صفحه نصف النهاری نقطه p_2 واقع است^{۴۱}. زاویه QP_2R را Ψ نامیده و خط QC را رسم نموده و محل برخورد آن را با P_2R ، D می نامیم. بنابراین می توان گفت DP_2 تقریباً برابر است با شعاع متوسط انحناء بین نقاط C, P_2 . زیرا D مرکز انحناء کمان نصف النهاری CP_2 می باشد. این شعاع انحناء متوسط با Mm و شعاع انحناء مقطع قائم اولیه دو نقطه P_1 را N_1 می نامیم بنابراین خواهیم داشت:

$$DQ = N_1 - Mm \quad (2-1)$$

بنابراین از مثلث DQP_2 خواهیم داشت:

$$\frac{\Psi}{DQ} = \frac{\Delta\phi}{Mm}$$

$$\Psi = \frac{\Delta\phi(N_1 - Mm)}{Mm} \quad \text{و یا (2-2)}$$

که با در نظر گرفتن بسط های M و N که بصورت:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\phi)^{\frac{3}{2}}} = a(1-e^2)(1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2\phi + \dots)$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\phi)^{\frac{3}{2}}} = a(1 + \frac{1}{2}e^2\sin^2\phi + \dots) \quad \text{و}$$

می باشند. همچنین با اغماض از اختلاف بین a و R خواهیم داشت:

$$\Psi = \Delta\phi e^2 \cos^2 \phi_2 \quad (2-3)$$

^{۴۱} نکته مهمی که آگاهی بر آن به درک بهتر فرمول این تصحیح کمک شایانی می کند این است که تصحیحات افقی در صفحه عمود بر صفحه قراولروی اعمال می گردند همانگونه که مشاهدات نیز در این صفحه انجام می شوند. در اینجا می بینیم که تصویر $p_1p'_2$ بر روی صفحه افقی قراولروی کمائی است به طول $p_1p'_2 \sin a_{12}$ و بنابراین تصویر آن بر صفحه قراولروی $p_1p'_2 \sin a_{12}$ خواهد بود و چون این خطای کمائی در طول L قرائت گردیده، مقدار زاویه

$$\Psi = e^2 (L/Mm) \cos a_{12} \cos^2 \varphi_2$$

و یا

با نشان دادن مقدار تصحیح با δ_h خواهیم داشت:

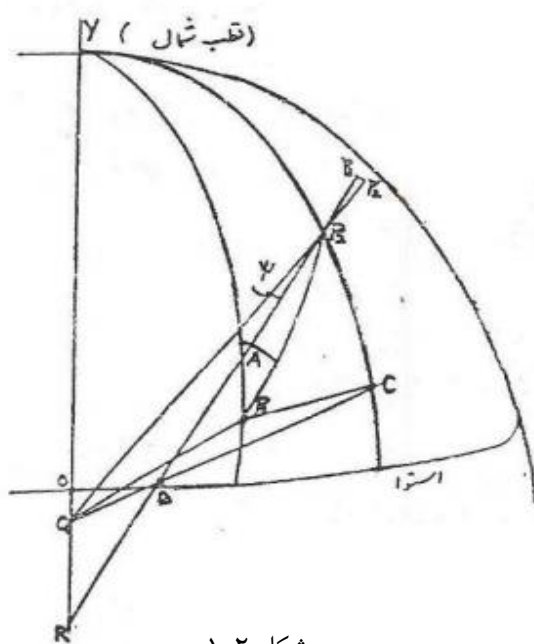
$$\delta_h'' = \rho'' \left(\frac{h_2 e^2}{2Mm} \sin 2a_{12} \cos^2 \varphi_2 \right) \quad (2-4)$$

که برابر است با $0.11'' \left(\frac{h_2}{1000} \right) (\sin 2a_{12} \cos^2 \varphi_2)$ (h بر حسب متر می باشد). مقدار این تصحیح چنانچه p_2 در جنوب غربی و یا شمال شرقی p_1 واقع باشد مثبت خواهد بود. مقدار تصحیح معمولاً کوچک است و حدود $0.3''$ برای $h = 3000m$ است. معمولاً در شبکه های ژئودزی درجه یک و در تعیین مختصات نقاط این شبکه ها این تصحیح وجود دارد. دومین اثر هندسی که می باید در تبدیل امتداد بین دو نقطه به سطح بیضوی مورد بررسی قرار گیرد اختلاف بین مقطع قائم آن امتداد و ژئودزیک گذرنده بر دو نقطه است. این تاثیر یا تصحیح را می توان مستقیماً از ترکیب روابط $(1-50)$ و $(1-32)$ بدست آورد:

$$\delta_h'' = \rho'' \left(\frac{e^2 s^2 \cos^2 \varphi \sin 2a_{12}}{12N_m^2} \right) \quad (2-5)$$

که در آن s بر حسب متر است.

مقدار این تصحیح با توجه به اندازه عوامل تشکیل دهنده اش می تواند کاملاً در محاسبات ژئودزی قابل اهمیت باشد (بجای عامل h در معادله ۲-۴) (ارتفاع از سطح بیضوی) می توان از ارتفاع ارتومتری (H) ایستگاه استفاده نمود بدون اینکه تغییر قابل ملاحظه ای در میزان تصحیح δh ایجاد شود).



شکل ۱-۲

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

همانطور که قبلا اشاره شد تئودولیت نسبت به بردار ثقل ایستگاه مشاهدات تراز می شود نه نسبت به بردار قائم بر بیضوی و بنابراین تصحیحی برای جبران این اختلاف یعنی زاویه بین این دو بردار (انحراف قائم) لازم است به مشاهدات اعمال شود. در شکل ۲-۲ این تصحیح نشان داده شده است. در این شکل p_1 ایستگاه مشاهدات و p_2 ایستگاه مورد مشاهده است و ارتفاع این دو نقطه از سطح بیضوی به ترتیب h_1, h_2 فرض شده است. P_1 تصویر قائم p_1 بر روی بیضوی و P'_1 محل برخورد قائم بر ژئوئید از نقطه p_1 با سطح بیضوی می باشند. صفحه قراولروی عملا صفحه گذرنده بر نقاط p_1 و P'_1 و p_2 است. بنابراین بایستی تصحیح به این صفحه اعمال شود تا تبدیل به صفحه گذرنده بر p_1 و P_1 و p_2 گردد یعنی تبدیل به صفحه ای شامل قائم بر بیضوی شود.

با توجه به مفروضات و توضیحات فوق روشن است که زاویه بین دو خط p_1P_1 و $P_1P'_1$ زاویه انحراف قائم در نقطه p_1 است. p_1P_1'' این زاویه را به دو جزء تجزیه می کند که یکی از آنها را که عمود بر صفحه قراولروی است با ζ نشان می دهیم^{۴۲} و اندازه آن برابر است با $\zeta_1 \sin a_{12} - \eta_1 \cos a_{12}$ ^{۴۳}. در شکل ۲-۲ خطوط $p_2t''P_2''$ و $p_2t'P_2'$ به ترتیب به موازات p_1P_1'' و p_1P_1 رسم گردیده اند در حالیکه t', t'' بر روی صفحه افق ایستگاه p_1 واقع اند. همچنین زاویه $p_2p_2't'$ که زاویه قائم از p_1 به p_2 است β می نامیم بنابراین:

$$t't'' = \zeta p_1t' \tan \beta \quad (2-6)$$

و میزان تصحیح یعنی زاویه $t'p_1t''$ با فرمول زیر بدست خواهد آمد:

$$\delta\theta = -t'p_1t'' = -\zeta \tan \beta = -(\zeta_1 \sin a_{12} - \eta_1 \cos a_{12}) \tan \beta \quad (2-7)$$

این تصحیح می تواند در محاسبات مهم باشد. در حالت حداکثر یعنی حالتی که ζ حدود $40''$ و $\beta = 5^\circ$ باشد مقدار این حدود $5\frac{1}{2}''$ و در حالت معمولی که ζ حدود $20''$ و $\beta = 1^\circ$ می باشند میزان این تصحیح حدود $0.3''$ است.

در شبکه مثلث بندی کشور هندوستان امتدادی وجود دارد که این تصحیح برای آن $4\frac{1}{2}''$ است. واضح است که برای محاسبه این تصحیح لازم است مقادیر η, ζ معین باشند یعنی عرض و طول نجومی (یا آزیموت نجومی) در نقاط شبکه های ژئودزی مشاهده شوند.

بطوریکه در فرمول دیده می شود مقدار تصحیح بستگی مستقیم به β یعنی زاویه ارتفاعی بین دو ایستگاه دارد بنابراین برای تعیین این تصحیح در شبکه های درجه یک در مناطق کوهستانی اغلب لازم است بر روی تمام ایستگاه ها مشاهدات نجومی انجام گیرد که البته کاری است بسیار دشوار. همچنین می توان برای تعیین η, ζ در نقاط مختلف شبکه از محاسبات یکجا دو

^{۴۲} همانطور که در پاورقی صفحات قبل توضیح داده شد تصحیحات مربوط به امتداد ها و زوایای مشاهده شده در صفحه و عمود بر صفحه قراولروی اعمال می گردند. ^{۴۳} ζ مؤلفه های η و ζ تنظیم و

قائم بر روی دو نصف النهار و قائم اولیه بوده و همچنین آزیموت بین دو ایستگاه معلوم باشد واضح است که تصویر کمان انحراف قائم بر روی صفحه قراولروی برابر است با $\zeta \cos a + \eta \sin a$ و بر روی صفحه عمود بر صفحه قراولروی مساوی است با $\zeta \sin a - \eta \cos a$.

٢-٢- فواصل سمت الرأسى

$$\delta z = \xi_1 \cos \alpha_{12} + \eta_1 \sin \alpha_{12} \quad (7-1)$$

با توجه به معادله ۸-۲ زاویه سمت الرأسی تصحیح شده عبارت است از:

$$z_R = z_m + \delta z = z_m + \xi_1 \cos \alpha_{12} + \eta_1 \sin \alpha_{12} \quad (2-9)$$

تہیہ و تنظیم:

حمید جعفرزادہ

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
حمید جعفرزاده
سپید:

در این قسمت موضوع تبدیل فاصله بین دو نقطه واقع بر سطح زمین (فاصله فضایی) به سطح بیضوی مورد بحث قرار می گیرد. پس از اینکه تصحیحات مختلف مربوط به دستگاه ها و تصحیحات اتمسفریک به مشاهدات فواصل $E.D.M$ اعمال گردید طول مستقیم فضایی L بدست خواهد آمد (شکل ۳-۲) که برای انجام محاسبات تعیین مختصات ژئودزی (البته در ژئودزی کلاسیک)، لازم است این فاصله به سطح بیضوی مقایسه تبدیل شود. برای انجام این تبدیل به روش زیر عمل می شود:

ابتدا رابطه

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2} \quad (2-10)$$

که در آن R_1, R_2 شعاع های انحنای اولر هستند محاسبه می شوند. سپس با استفاده از قانون کسینوس ها در مثلث P_1P_2O خواهیم داشت:

$$L^2 = (R + h_1)^2 + (R + h_2)^2 - 2(R + h_1)(R + h_2) \cos \Psi \quad (2-11)$$

که

$$h_1 = H_1 + N_1 \quad (2-12)$$

$$h_2 = H_2 + N_2 \quad (2-13) \text{ و}$$

ارتفاع بیضوی در نقاط P_1, P_2 می باشند (H ارتفاع ارتومتریک و N ارتفاع ژئوئید است).

$$\cos \Psi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\Psi}{2} \quad (2-14) \text{ با قرار دادن}$$

در معادله ۲-۱۱ و مرتب کردن معادله ، خواهیم داشت:

$$L^2 = (h_2 - h_1)^2 + 4R^2 \left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \left(1 + \frac{h_2}{R}\right) \sin^2 \frac{\Psi}{2} \quad (2-15)$$

همچنین در مثلث P_1P_2O داریم:

$$L_0 = 2R \sin \frac{\Psi}{2} \quad (2-16)$$

$$\Psi = 2 \sin^{-1} \frac{L_0}{2R} \quad \text{و یا}$$

$$h_2 - h_1 = \Delta h \quad \text{و با قرار دادن (2-17)}$$

معادله ۲-۱۵ بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$L^2 = \Delta h^2 + \left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \left(1 + \frac{h_2}{R}\right) L_0^2$$

تهیه و تنظیم:
۱۸ حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

به منظور تبدیل یک زاویه محاسبه شده (تبدیل شده به سطح بیضوی) به زاویه مشاهده شده، ابتدا آزیموت های بین نقاط مورد نظر محاسبه شده و سپس با استفاده از معادلات ۲-۷، ۲-۵ و ۲-۴، به ترتیب تصحیحات $\delta''_h, \delta''_g, \delta''_s$ را محاسبه کرده و با علامت عکس علامتی که به امتداد محاسبه شده α_{ij} اعمال گردیده بود به آن امتداد اعمال می گردد و به این ترتیب امتداد مشاهده شده α_{ij} از طریق محاسبه بدست می آید. واضح است که امتدادی که به این نحو بدست می آید دقیقاً با آنچه که عملاً از مشاهده حاصل خواهد شد یکسان نخواهد بود و انحراف معیاری خواهند داشت. همین روش برای تبدیل فواصل نیز بکار می رود. برای تبدیل این منظور، با استفاده از فرمول ۲-۲۰ داریم:

$$L_0 = 2R \sin \frac{s}{2R} \quad (2-20a)$$

و به همین نحو از فرمول ۲-۱۹ خواهیم داشت:

$$L = \left(\frac{L_0^2 (1 + \frac{h_1}{R})(1 + \frac{h_2}{R})}{\Delta h^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-19a)$$

بنابراین با داشتن فاصله s بر روی بیضوی می توان فاصله زمینی L بین دو نقطه را محاسبه نمود. البته بایستی توجه داشت که در اینجا نیز همانند قبل، بین فاصله مشاهده که از طریق محاسبه بدست می آید با فاصله مشاهده شده عملی انحراف معیاری وجود خواهد داشت.

قسمت سوم : محاسبات مختصات ژئودتیک بر روی بیضوی مقایسه

۳) فرمول پواسون - خطوط کوتاه

۳-۱- مقدمه

این فرمول ها به نام ریاضیدان پواسون فرانسوی^{۴۴} که اثبات کننده و مبتکر آنها بوده، معروف است و به دلیل آن که اساس اثبات آنها بر تقریبات کروی است بایستی تصحیح $1ppm$ در طول ۱۰۰ کیلومتر برای آنها در نظر گرفت. باید دانست که این دقت در طول های بیشتر از ۱۰۰ کیلومتر به سرعت کاهش می یابد. به طور مثال در فاصله ۲۵۰ کیلومتر در $\varphi = 60^\circ$ ، میزان تصحیح $40ppm$ است و بنابراین می گوئیم که فرمول پواسون فرمولی است برای خطوط کوتاه.

۳-۲- مسئله مستقیم

مقادیر λ_1, φ_1 (مختصات نقطه P_1)، s_{12} (فاصله تبدیل یافته به سطح بیضوی بین ایستگاه های P_1, P_2) و α_{12} (آزیموت ژئودتیک امتداد P_1P_2) داده شده اند (شکل ۳-۱). کمیت های خواسته شده عبارتند از λ_2, φ_2 (مختصات نقطه P_2) و α_{21} (آزیموت ژئودتیک امتداد P_2P_1).

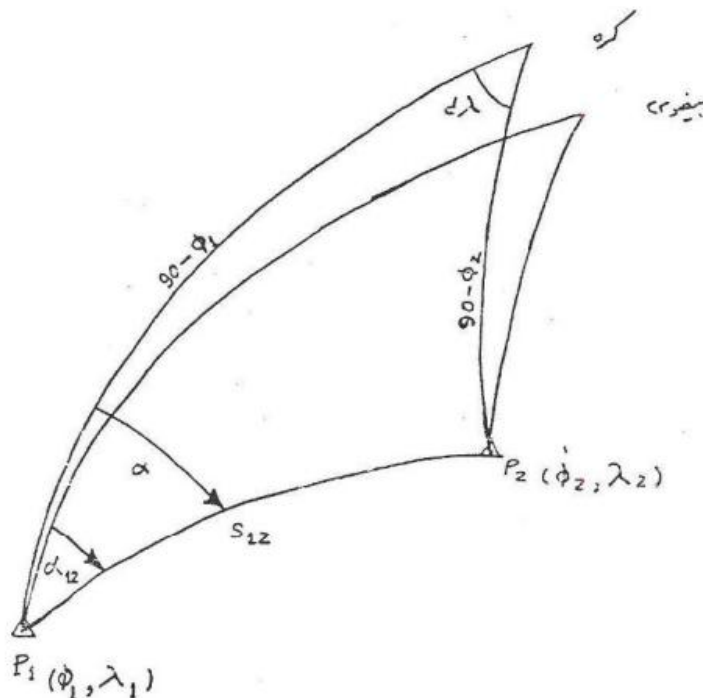
ابتدا φ_2 محاسبه می شود بدین منظور برای حفظ تقریبات کروی از فرمول های مثلثات کروی استفاده می شود:

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cos(P_1P_2) + \cos \varphi_1 \sin(P_1P_2) \cos \alpha \quad (5-1)$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز



شکل ۳-۱ (مربوط به فرمول پواسون برای مسئله مستقیم)

ولی $P_1P_2 = \frac{S_{12}}{N_1}$ و $\varphi_2 = \varphi_1 + d\varphi$ و $\alpha = \alpha_{12}$ بنابراین:

$$\sin(\varphi_1 + d\varphi) = \sin \varphi_1 \cos\left(\frac{S_{12}}{N_1}\right) + \cos \varphi_1 \sin\left(\frac{S_{12}}{N_1}\right) \cos \alpha_{12} \quad (3-2)$$

با توجه به مطالب فوق لازم است اندازه $d\varphi$ را بدست آورد. طرف چپ معادله ۳-۲ را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\sin(\varphi_1 + d\varphi) = \sin \varphi_1 \cos(d\varphi) + \cos \varphi_1 \sin(d\varphi) \quad (3-3)$$

با استفاده از بسط سینوس و کسینوس داریم:

$$\cos(d\varphi) \approx 1 - \frac{d\varphi^2}{2} + \dots \quad (3-4)$$

$$\sin(d\varphi) \approx d\varphi - \frac{d\varphi^3}{6} + \dots$$

که پس از قرار دادن در معادله ۳-۳ خواهیم داشت:

$$\sin(\varphi_1 + d\varphi) = \sin \varphi_1 - \sin \varphi_1 \frac{d\varphi^2}{2} + \cos \varphi_1 d\varphi - \cos \varphi_1 \frac{d\varphi^3}{6} + \dots \quad (3-5)$$

با توجه به روابط ۳-۴ می توان $\sin\left(\frac{S_{12}}{N_1}\right)$ و $\cos\left(\frac{S_{12}}{N_1}\right)$ را بسط داده و از این بسط ها استفاده نمود:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$\cos\left(\frac{s_{12}}{N_1}\right) = 1 - \frac{s_{12}^2}{2N_1^2} + \dots \quad (3-6)$$

$$\sin\left(\frac{s_{12}}{N_1}\right) = \frac{s_{12}}{N_1} - \frac{s_{12}^3}{6N_1^3} + \dots$$

بنابراین:

(3-7)

$$\begin{aligned} & \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 d\varphi - \sin \varphi_1 \frac{d\varphi^2}{2} + \cos \varphi_1 \frac{d\varphi^3}{6} + \dots \\ &= \sin \varphi_1 + \frac{s_{12}}{N_1} \cos \alpha_{12} \cos \varphi_1 - \frac{s_{12}^2}{2N_1^2} \sin \varphi_1 - \frac{s_{12}^3}{6N_1^3} \cos \alpha_{12} \cos \varphi_1 + \dots \end{aligned}$$

که پس از تقسیم طرفین این رابطه بر $\cos \varphi_1$ خواهیم داشت:

$$d\varphi = \frac{s_{12}}{N_1} \cos \alpha_{12} - \frac{s_{12}^2}{2N_1^2} \tan \varphi_1 - \frac{s_{12}^3}{6N_1^3} \cos \alpha_{12} + \frac{d\varphi^2}{2} \tan \varphi_1 + \frac{d\varphi^3}{6} + \dots \quad (3-8)$$

واضح است که بعلت وجود $d\varphi$ در هر دو طرف این معادله نمی توان آن را از این رابطه محاسبه نمود. برای حل این مسئله دوباره از تقریب کروی استفاده نموده و خواهیم داشت:

$$d\varphi \approx \frac{s_{12}}{N_1} \cos \alpha_{12} \quad (3-9)$$

با قرار دادن $d\varphi$ از معادله 3-9 در 3-8 رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$d\varphi \approx \frac{s_{12}}{N_1} \cos \alpha_{12} - \frac{s_{12}^2}{2N_1^2} \tan \varphi_1 - \frac{s_{12}^3}{6N_1^3} \cos \alpha_{12} + \frac{s_{12}^2}{2N_1^2} \cos^2 \alpha_{12} \tan \varphi_1 + \frac{d\varphi^3}{6} + \dots \quad (3-10)$$

از این رابطه می توان با تقریب دقیق تری $d\varphi$ را محاسبه نمود یعنی:

$$d\varphi \approx \frac{s_{12}}{N_1} \cos \alpha_{12} - \frac{s_{12}^2}{2N_1^2} \tan \varphi_1 (1 - \cos^2 \alpha_{12}) + \dots \quad (3-11)$$

(از عوامل بالاتر از درجه دو صرف نظر شده است) که می توان آن را بصورت ساده شده زیر نوشت:

$$d\varphi \approx \frac{s_{12}}{N_1} \cos \alpha_{12} - \frac{s_{12}^2}{2N_1^2} \tan \varphi_1 \sin^2 \alpha_{12} + \dots \quad (3-12)$$

با استفاده از توان دوم رابطه فوق و صرف نظر کردن از قوای بالاتر از سه خواهیم داشت:

$$d\varphi^2 \approx \frac{s_{12}^2}{N_1^2} \cos^2 \alpha_{12} - \frac{s_{12}^3}{N_1^3} \cos \alpha_{12} \sin^2 \alpha_{12} \tan \varphi_1 + \dots \quad (3-13)$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$d\varphi^3 \approx \frac{S_{12}^3}{N_1^3} \cos^3 \alpha_{12} + \dots \quad \text{همچنین: (۳-۱۴)}$$

با جایگزین کردن روابط ۳-۱۴ و ۳-۱۳ در ۳-۸ خواهیم داشت:

$$d\varphi \approx \frac{S_{12}}{N_1} \cos \alpha_{12} - \frac{S_{12}^2}{2N_1^2} \tan \varphi_1 - \frac{S_{12}^3}{6N_1^3} \cos \alpha_{12} + \frac{S_{12}^2}{2N_1^2} \cos^2 \alpha_{12} \tan \varphi_1 - \frac{S_{12}^3}{2N_1^3} \cos \alpha_{12} \sin^2 \alpha_{12} \tan^2 \varphi_1 + \frac{S_{12}^3}{6N_1^3} \cos^3 \alpha_{12} + \dots \quad (۳-۱۵)$$

$$d\varphi \approx \frac{S_{12}}{N_1} \cos \alpha_{12} - \frac{S_{12}^2}{2N_1^2} \tan \varphi_1 \sin^2 \alpha_{12} - \frac{S_{12}^3}{2N_1^3} \cos \alpha_{12} \sin^2 \alpha_{12} \tan^2 \varphi_1 - \frac{S_{12}^3}{6N_1^3} \cos \alpha_{12} \sin^2 \alpha_{12} + \dots \quad \text{و یا (۳-۱۶)}$$

این رابطه را می توان با استفاده از فرمول زیر بصورت ساده تری نوشت:

$$-\frac{S_{12}^3}{2N_1^3} \cos \alpha_{12} \sin^2 \alpha_{12} \tan^2 \varphi_1 - \frac{S_{12}^3}{6N_1^3} \cos \alpha_{12} \sin^2 \alpha_{12} = -\frac{S_{12}^3}{6N_1^3} \cos \alpha_{12} \sin^2 \alpha_{12} (1 + 3 \tan^2 \varphi_1) \quad (۳-۱۷)$$

$$d\varphi' \approx \frac{S_{12}}{N_1} \cos \alpha_{12} - \frac{S_{12}^2}{2N_1^2} \tan \varphi_1 \sin^2 \alpha_{12} - \frac{S_{12}^3}{2N_1^3} \cos \alpha_{12} \sin^2 \alpha_{12} (1 + 3 \tan^2 \varphi_1) + \dots \quad (۳-۱۸)$$

معادله ۳-۱۸ حل دقیق تری را برای مجهول $d\varphi$ ارائه نمی دهد زیرا شعاع انحناء در طول مقطع قائم از P_1 به P_2 ثابت و برابر با N_1 فرض شده در حالیکه این میزان و اندازه این عامل در هر نقطه تابعی است از عرض ژئودتیک آن نقطه یعنی $M = f_2(\varphi), N = f_1(\varphi)$ (رجوع شود به فرمول های ۱-۱۶ و ۱-۱۴). برای محاسبه این تغییر در انحناء می توان نوشت:

$$d\varphi = \frac{1}{M_m} \quad (\text{طرف راست معادله ۳-۱۸}) \quad (۳-۱۹)$$

$$Mm = \frac{M_1 + M_2}{2} \quad \text{در رابطه } \frac{1}{M_1} \text{ بجای } \frac{1}{M_m} \text{ جایگزین شده و (۳-۲۰)}$$

چون مقدار φ_2 مجهول است می توانیم مقدار تقریبی زیر را برای شعاع انحناء در نقطه P_2 در نظر بگیریم:

$$M_2 = M_1 + dM_1 \quad (۳-۲۱)$$

از معادله ۱-۱۴ پس از مشتق گیری خواهیم داشت:

$$\frac{dM_1}{d\varphi} = a(1 - e^2) \left(\frac{-3}{2} \right) (1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)^{\frac{-5}{2}} (-2e^2 \sin^2 \varphi_1) \cos \varphi_1 \quad (۳-۲۲)$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده
دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
با این رابطه می توان به راحتی روابط دیگر را به دست آورد و با معادله زیر:

$$\frac{dM_1}{d\varphi} = M_1 \frac{3e^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)} \quad (3-23)$$

که پس از بکار بردن آن در معادله ۳-۲۰ نتایج زیر بدست خواهد آمد:

$$Mm = \frac{M_1 + (M_1 + dM_1)}{2} = M_1 + \frac{dM_1}{2} \quad (3-24)$$

$$Mm = M_1 + \frac{dM_1}{d\varphi_1} \left(\frac{d\varphi''}{2\rho''} \right) \quad (3-25)$$

$$Mm = M_1 + \frac{3}{2} M_1 \frac{e^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)} \left(\frac{d\varphi''}{\rho''} \right) \quad (3-26)$$

$$\frac{1}{Mm} = \frac{1}{M_1} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{e^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)} \left(\frac{d\varphi''}{\rho''} \right) \right) \quad (3-27)$$

که پس از جایگزینی این رابطه در معادله ۳-۱۹ خواهیم داشت:

$$d\varphi'' = \left[\rho'' \left(\frac{s_{12} \cos \alpha_{12}}{M_1} - \frac{s_{12}^2 \tan \varphi_1 \sin^2 \alpha_{12}}{2M_1 N_1} - \frac{s_{12}^3 \cos \alpha_{12} \sin^2 \alpha_{12} (1 + 3 \tan^2 \varphi_1)}{6M_1 N_1^2} + \dots \right) - \left(1 - \frac{3e^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{2(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)} \left(\frac{d\varphi''}{\rho''} \right) \right) \right] \quad (3-28)$$

در این رابطه ، $d\varphi''$ در قسمت آخر با استفاده از معادله ۳-۱۸ حساب شده و در این معادله بکار می رود. اکنون با محاسبه $d\varphi$ می توان φ_2 را از معادله زیر :

$$\varphi_2 = \varphi_1 + d\varphi \quad (3-29)$$

تعیین نمود. طول ژئودتیک نقطه P_2 را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + d\lambda \quad (3-30)$$

از شکل ۳-۱ و با بکار بردن تقریب کروی خواهیم داشت:

$$\frac{\sin d\lambda}{\sin \frac{s_{12}}{N_2}} = \frac{\sin \alpha_{12}}{\sin(90 - \varphi_2)} \quad (3-31)$$

$$\sin d\lambda = \sin \frac{s_{12}}{N_2} \sin \alpha_{12} \sec \varphi_2 \quad (3-32) \text{ و یا}$$

که پس از جایگزین نمودن سینوس ها در رابطه فوق با بسط های شان به سری تیلور و صرف نظر کردن از قوای بالاتر از سه در این بسط خواهیم بنویسیم:

تقریب می توانیم بنویسیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$d\lambda - \frac{d\lambda^3}{6} + \dots = \left(\frac{s_{12}}{N_2} - \frac{s_{12}^3}{6N_2^3} + \dots \right) (\sin \alpha_{12} \sec \varphi_2) \quad (3-33)$$

$$d\lambda = \frac{s_{12}}{N_2} \sin \alpha_{12} \sec \varphi_2 - \frac{s_{12}^3}{6N_2^3} \sin \alpha_{12} \sec \varphi_2 + \frac{d\lambda^3}{6} + \dots \quad (3-34) \text{ و یا}$$

اکنون با استفاده از دو قسمت اول رابطه ۳-۳۴ و صرف نظر کردن از قوای بالاتر از سه خواهیم داشت:

$$d\lambda^3 = \frac{s_{12}^3}{6N_2^3} \sin^3 \alpha_{12} \sec^3 \varphi_2 + \dots \quad (3-35)$$

که در نتیجه خواهیم داشت:

$$d\lambda'' = \rho'' \left[\frac{s_{12}}{N_2} \sin \alpha_{12} \sec \varphi_2 \left(1 - \frac{s_{12}^2}{6N_2^2} (1 - \sin^2 \alpha_{12} \sec^2 \varphi_2) \right) \right] \quad (3-36)$$

که پس از قرار دادن آن در رابطه ۳-۳۰ می توان λ_2 را حساب نمود. گرچه تعیین α_{12} قسمتی از مسئله مستقیم است حل آن موکول به قسمت بعد می شود.

مسئله معکوس ۳-۳

مقادیر φ_1, λ_1 (مختصات نقطه P_1) و φ_2, λ_2 (مختصات نقطه P_2) داده شده اند. مجهولات مسئله عبارتند از s_{12} (فاصله بین نقاط P_2, P_1)، α_{12} (آزیموت از P_1 به P_2) و α_{21} (آزیموت از P_2 به P_1) (رجوع شود به شکل ۳-۲).

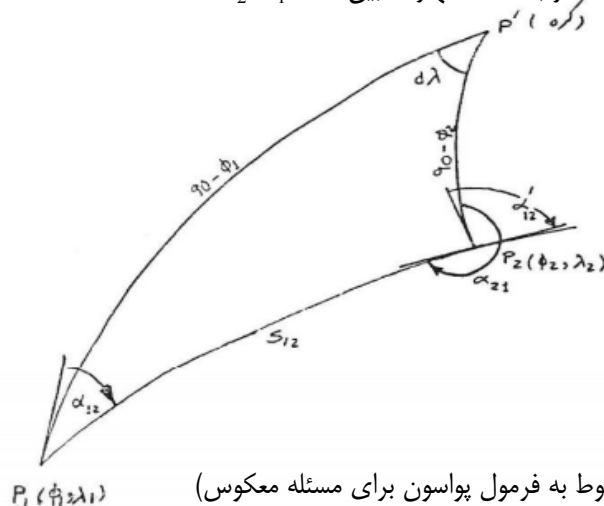
برای تعیین این مجهولات ابتدا از α_{21} شروع می کنیم. با بکار بردن تقریب کروی داریم:

$$\angle P P_2 P_1 = 360 - \alpha_{21} \quad (3-37)$$

$$\frac{1}{2} (\angle P P_1 P_2 + \angle P P_2 P_1) = \frac{1}{2} (\alpha_{12} + 360 - \alpha_{21}) \quad (3-38) \text{ و}$$

$$\alpha'_{12} - \alpha_{12} = d\alpha \quad (3-39)$$

که در رابطه اخیر $d\alpha$ نشان دهنده تقارب نصف النهارات بین نقاط P_2, P_1 است.



۳-۲ (مربوط به فرمول پواسون برای مسئله معکوس)

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

hamid73j@ymail.com

با مراجعه به شکل ۳-۲ می توانیم بنویسیم:

$$\alpha_{21} = \alpha'_{12} + 180 \quad (3-40)$$

و با جایگزینی α'_{12} از معادله ۳-۳۹ خواهیم داشت:

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} + d\alpha + 180 \quad (3-41)$$

سپس با قرار دادن α_{21} از (۳-۴۱) در (۳-۳۸) رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\frac{1}{2}(\angle P'P_1P_2 + \angle P'P_2P_1) = \frac{1}{2}(\alpha_{12} + 360 - \alpha_{21} - d\alpha - 180) \quad (3-42)$$

$$\frac{1}{2}(\angle P'P_1P_2 + \angle P'P_2P_1) = 90 - \frac{d\alpha}{2} \quad \text{و یا (3-43)}$$

با استفاده از فرمول های تانژانت های مثلثات کروی خواهیم داشت:

$$\tan(90 - \frac{d\alpha}{2}) = \cot \frac{d\lambda}{2} \frac{\cos \frac{1}{2}[(90 - \varphi_2) - (90 - \varphi_1)]}{\cos \frac{1}{2}[(90 - \varphi_2) + (90 - \varphi_1)]} \quad (3-44)$$

که پس از معکوس نمودن رابطه فوق داریم:

$$\tan \frac{d\alpha}{2} = \frac{\cos(90 - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2})}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)} \tan \frac{d\lambda}{2} \quad (3-45)$$

$$\tan \frac{d\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos \frac{d\varphi}{2}} \tan \frac{d\lambda}{2} \quad \text{و یا (3-46)}$$

که پس از جایگزین نمودن عامل تانژانت با بسط آن به سری تیلور (البته با صرف نظر کردن از قوای بالاتر از سه) خواهیم داشت:

$$d\alpha'' = \rho'' \left[d\lambda \sin \varphi_m \sec \frac{d\varphi}{2} + \frac{d\lambda^3}{12} (\sin \varphi_m \sec \frac{d\varphi}{2} - \sin^3 \varphi_m \sec^3 \frac{d\varphi}{2}) + \dots \right] \quad (3-47)$$

که در این رابطه $\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ می باشد.

با قرار دادن $d\alpha$ از ۳-۴۷ در ۳-۴۱ چنانچه α_{12} معین باشد می توان α_{21} را بدست آورد. برای تعیین α_{12} به این ترتیب عمل می کنیم و ابتدا معادله ۳-۲۸ را در نظر گرفته و آن را بصورت زیر مرتب می کنیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$s_{12} \cos \alpha_{12} = \frac{d\varphi''}{\rho''} \cdot \left(\frac{M_1}{1 - \frac{3e^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{2(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)} \left(\frac{d\varphi''}{\rho''} \right)} \right) + \frac{s_{12}^2 \tan \varphi_1 \sin^2 \alpha_{12}}{2N_1} \quad (3-48)$$

$$+ \frac{s_{12}^3 \cos \alpha_{12} \sin^2 \alpha_{12} (1 + 3 \tan^2 \varphi_1)}{6N_1^2}$$

همچنین با مرتب نمودن معادله ۳-۳۶ بصورت زیر خواهیم داشت:

$$s_{12} \sin \alpha_{12} = \frac{d\lambda''}{\rho''} \cdot \frac{N_2}{\sec \varphi_2} + \frac{s_{12}^3}{6N_2^2} \sin \alpha_{12} - \frac{s_{12}^3}{6N_2^2} \sin^3 \alpha_{12} \sec^2 \varphi_2 \quad (3-49)$$

$$\tan \alpha_{12} = \frac{(3-49)}{(3-48)} \quad \text{اکنون با تقسیم نمودن طرفین معادله ۳-۴۹ بر طرفین معادله ۳-۴۸ داریم: (۳-۵۰)}$$

واضح است که به سبب وجود α_{12} در طرف دوم، با این رابطه نمی توان به اندازه این کمیت دست یافت. برای یافتن این مجهول از روش تکرار استفاده نموده و ابتدا مقداری اولیه برای آن در نظر می گیریم. این مقدار تقریبی را می توان با حذف ترم های دوم به بعد در صورت و مخرج کسر ۳-۵۰ بدست آورد. همچنین برای تعیین مقدار تقریبی اولیه s_{12} می توان از معادلات ۳-۴۸ و ۳-۴۹ با حذف ترم های مزبور استفاده نمود (البته در تعیین مقدار تقریبی برای s_{12} لازم است مقدار α_{12} معین باشد که بدین منظور می توان از مقدار تقریبی آن که در بالا ذکر شد استفاده نمود). و سپس روش تکرار را به همان ترتیب که در بخش اول ذکر گردید انجام می دهیم. تکرار تا مرحله ای که تغییرات در α_{12} و s_{12} ناچیز شود ادامه می یابد یعنی تا وقتی که $\Delta s \leq 0.001m$ و $\Delta \alpha_{12} \leq 0.002''$ شود.

۳-۴ خلاصه معادلات مربوط به حل مسائل مستقیم و معکوس با بکار بردن فرمول های پواسون

در زیر مراحل مختلفی را که برای حل مسائل مستقیم و معکوس با استفاده از فرمول های پواسون لازم است اجرا شود آورده شده است. ابتدا مراحل مختلف مسئله مستقیم ذکر می گردد:

- ۱- با فرمول های (۱-۱۶) و (۱-۱۴)، N_1, M_1 حساب می شوند
 - ۲- مقدار تقریبی $d\varphi'$ با استفاده از فرمول (۳-۱۸) بدست می آید
 - ۳- $d\varphi''$ با رابطه (۳-۲۸) و φ_2 با فرمول (۳-۲۹) محاسبه می شوند
 - ۴- N_2 با استفاده از معادله (۱-۱۶) تعیین می شود
 - ۵- با بکار بردن رابطه (۳-۳۶)، $d\lambda''$ و سپس با (۳-۳۰) λ_2 حساب می شوند
 - ۶- $d\alpha''$ با معادله (۳-۴۷) و α_{21} با معادله (۳-۴۱) بدست می آیند
- به همین ترتیب مراحل لازم برای حل مسئله معکوس را می توان به شرح زیر خلاصه کرد:

- ۱- M_1 با معادله (۱-۱۴) و N_1, N_2 با (۱-۱۶) محاسبه می شوند
- ۲- α_{12} با استفاده از (۳-۵۰) بدست می آید
- ۳- $d\alpha''$ و سپس α_{21} به ترتیب با معادله های (۳-۴۷) و (۳-۴۱) حساب می شوند

با استفاده از فرمول های (۳-۴۸) یا (۳-۴۹) مقدار s_{12} بدست می آید

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
حمید جعفرزاده

۳-۵- فرمول های گوس برای عرض های متوسط

این فرمول ها ابتدا در سال ۱۸۶۱ ابداع و منتشر شد. اساس آنها بر تقریبات کروی . کاربرد آنها در طول های کمتر از ۵۰ کیلومتر در عرض های کمتر از ۸۰ درجه است. فرمول های آن ها به شرح زیر است:

$$d\alpha'' = d\lambda'' \sin \varphi_m \quad (3-51)$$

$$d\varphi'' = \rho'' \left(\frac{s_{12} \cos \alpha_m}{Mm} \right) \quad (3-52)$$

$$d\lambda'' = \rho'' \left(\frac{s_{12} \sin \alpha_m}{Mm \cos \varphi_m} \right) \quad (3-53)$$

که در این روابط $\alpha_m = \alpha_{12} + \frac{d\alpha}{2}$ (۳-۵۴) است.

تشابهات این فرمول ها با فرمول های پواسون از مقایسه روابط (۳-۵۳) و (۳-۵۲) و (۳-۵۱) با قسمت های اول معادلات (۳-۴۷) و (۳-۲۸) و (۳-۳۶) آشکار خواهد شد.

برای حل مسئله مستقیم با فرمول های عرض های متوسط باید از روش تکرار استفاده شود. ابتدا می توان $d\varphi''$ را بطور تقریبی با بکار بردن آزمایش مشاهد شده بجای α_m و M_1 بجای Mm حساب نمود و سپس اولین تقریب φ_2 را با استفاده از (۳-۲۹)، اولین تقریب $d\lambda$ را با استفاده از (۳-۵۳) و λ_2 را با (۳-۳۰) بدست آورد و از آنجا $d\alpha$ را با (۳-۵۱) محاسبه نمود. اکنون با بکار بردن مقادیر تقریبی متوالی برای $d\varphi$ و $d\alpha$ (بنابراین برای (α_m, φ_m)) می توان روش تکرار را تا زمان دستیابی به حدود خواسته شده ادامه داد و بالاخره $d\lambda''$ را برای تعیین λ_2 بایستی محاسبه کرد.

مسئله معکوس بدون استفاده از روش تکرار حل می شود زیرا φ_m در دست است. $d\alpha$ با رابطه (۳-۴۷) قابل محاسبه است. همچنین $\tan \alpha_m$ از تقسیم (۳-۵۳) بر (۳-۵۲) و از آنجا α_{12}, α_{21} با (۳-۴۳) بدست می آیند و بالاخره s_{12} را می توان با بکار بردن یکی از فرمول های (۳-۵۲) و (۳-۵۳) حساب کرد.

۳-۶- دیگر فرمول های خطوط کوتاه

فرمول های زیادی برای حل مسائل مستقیم و معکوس در مورد طول های کوتاه وجود دارد مانند: فرمول تقریبی کلارک^{۴۰} (کمتر از ۱۵۰ کیلومتر در ۱ppm) و فرمول تقریبی Lilly (۱۵ متر در ۱۰۰۰ کیلومتر). تمام این نوع فرمول ها برای حل مسائل مستقیم و معکوس بر اساس تقریبات کروی هستند و دقت فرمول هایی مانند فرمول Bessel برای طول های بلند که در قسمت ۴ مورد بررسی قرار می گیرند فاقدند.

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

hamid73j@ymail.com

کلیات

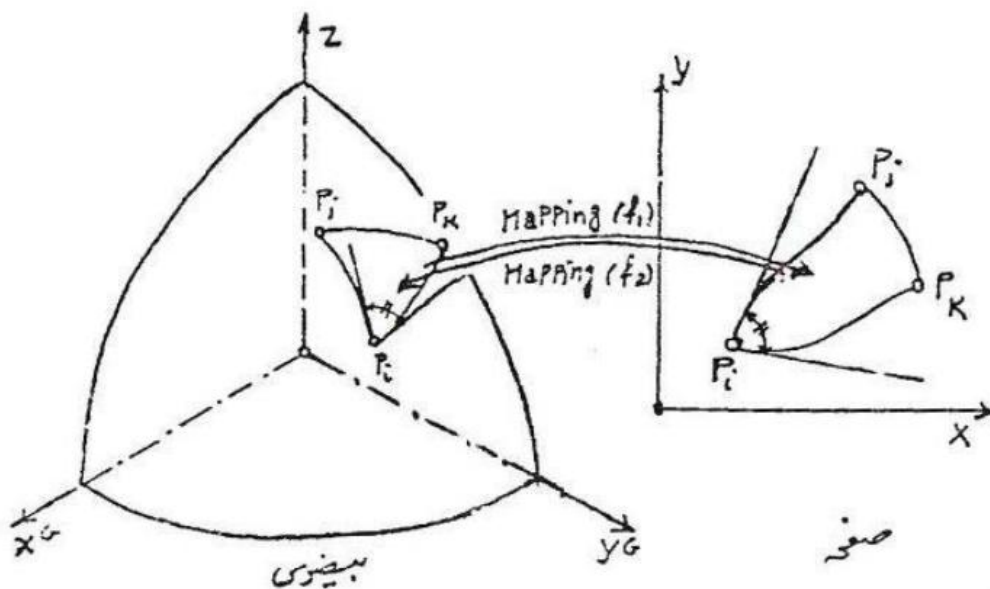
تصاویر متشابه ^{۴۶} آن دسته از تصاویر هستند که زوایای روی سطحی را که می باید تصویر شوند، همان اندازه اصلی شان را حفظ می نمایند یعنی سیستم هایی هستند که با اعمال آنها زوایای متناظر روی سطح اصلی و سطح تصویر باهم برابر خواهند بود. در ژئودزی سطح مورد نظر بیضوی است و سطح تصویر صفحه است که آن را صفحه تصویر ^{۴۷} می نامیم. در ارتباط بین نقاط واقع بر روی بیضوی و نقاط واقع بر صفحه تصویر با دو مجموعه مختصات سر و کار خواهیم داشت. این دو مجموعه مختصات عبارتند از: عرض و طول ژئودتیک (φ, λ) و مختصات نقاط تصویر شده بر روی صفحه تصویر (X, Y) .

مطالب این بخش در دو قسمت مطرح خواهند شد. در اولین قسمت تبدیل ^{۴۸} مختصات ژئودتیک (φ, λ) به مختصات نقاط تصویر شده (X, Y) و بالعکس مورد مطالعه قرار می گیرد و قسمت دوم شامل محاسبات مختصات ژئودتیک است بر روی صفحه تصویر متشابه. قسمت اول را تصویر یا تبدیل متشابه و قسمت دوم را محاسبات بر روی صفحه تصویر می نامیم.

(۱) مقدمه ای بر تصاویر متشابه

همانطوری که در کلیات گفته شد، یک تصویر متشابه در ژئودزی تصویری است از یک شکل هندسی واقع بر رویه بیضوی بر روی یک صفحه بطوریکه اندازه زوایای آن شکل پس از تصویر شدن حفظ شوند.

بطور کلی می توان مفهوم چنین تصویر یا تبدیلی را با شکل زیر بیان نمود:



شکل ۱-۳ (تصویر متشابه مثلی واقع بر روی بیضوی روی صفحه)

تهیه و تنظیم:

حمید مجفرازاده
conformal
Map plan
Mapping

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

در این شکل مثلث بیضوی $P_i P_j P_k$ با اعمال $\text{mapping}(f_1)$ تبدیل به مثلث مسطحاتی $P_i P_j P_k$ شده و بالعکس. مثلث اخیر با اعمال $\text{mapping}(f_2)$ مبدل به مثلث بیضوی اولیه گردیده بطوریکه زوایای این دو مثلث باهم برابرند. مسئله اساس در بحث تصاویر متشابه یافتن این دو mapping است که ما آنها را برای رعایت اختصار تنها با f_2, f_1 نشان خواهیم داد. این بدان معنی است که چنانچه مختصات ژئودتیک نقطه ای واقع بر بیضوی را با (φ, λ) و مختصات آن را پس از اعمال f_1 با (x, y^*) نشان دهیم خواهیم داشت:

$$(x+iy) = f_1(\lambda+i\varphi) \quad (1-1)$$

و اگر مختصات x, y نقطه ای را بر روی صفحه تصویر داشته باشیم پس از اعمال f_2 خواهیم داشت:

$$(\lambda+i\varphi) = f_2(x+iy) \quad (1-2)$$

در حقیقت f_2, f_1 توابع تحلیلی هستند که آنها هدف اصلی و مسئله اساسی در بحث سیستم های متشابه است. $i = \sqrt{-1}$ و علت بکار بردن متغیرهای مختلط در این درس بحثی است که در آینده به آن خواهیم پرداخت.

با توجه به مطالب فوق واضح است که در این قسمت با دو مسئله روبرو هستیم. این دو مسئله عبارتند از: حل معادلات ۱-۱ و ۱-۲ که آن ها را به ترتیب مسائل مستقیم و معکوس می نامیم.

برای حل این مسائل لازم است مروری کوتاه به جبر اعداد مختلط به عمل آید که این موضوع در قسمت دوم مورد بحث قرار خواهد گرفت. همچنین مطالب مورد نیاز از هندسه دیفرانسیل در قسمت سوم مرور خواهد شد. در قسمت چهارم، اصول نظریه تصاویر متشابه و در قسمت های پنجم تا هشتم تصاویر متشابه مرکاتور، ترانسورس مرکاتور، سیستم مخروطی لامبرت و استروگرافیک مطالعه خواهند شد. در قسمت نهم مجموعه ای معادلاتی که قبلاً ذکر گردیده بطور اختصار ارائه خواهد گردید.

(۲) مروری بر متغیرهای متغیر

در گسترش معادلات مختلف تصاویر متشابه می توان از جبر اعداد مختلط استفاده نمود. هدف از این قسمت مروری است کوتاه بر بخش هایی از جبر مختلط که در این بحث مورد نیاز می باشد.

۲-۱- قوانین حساب مختلط

$$z = a + ib; i = \sqrt{-1} \quad (2-1)$$

که در آن a, b اعداد حقیقی و i عدد موهومی است. تعاریف و قوانین زیر برقرار است:

۱- مجموع دو عدد مختلط عددی است مختلط. یعنی:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad (2-2)$$

۲- جمع دارای خاصیت انجمنی است:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = z_2 + (z_1 + z_3) \quad (2-3)$$

۳- هر عدد مختلط دارای یک عدد متقارن نسبت به صفر یک است یعنی:

تهیه و تنظیم
حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$z = a + ib$$

$$-z = -a - ib$$

(۲-۴)

۴- جمع دارای خاصیت جابجایی است:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

(۲-۵)

۵- ضرب بصورت زیر تعریف می شود:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2) - i(b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = z_3$$

(۲-۶)

۶- ضرب دارای خاصیت انجمنی است یعنی:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = z_2 \cdot (z_1 \cdot z_3) = z_3 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

(۲-۷)

۷- هر عدد مختلط مخالف صفر دارای یک معکوس صفر است یعنی:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} \cdot \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

(۲-۸)

۸- عدد مزدوج $\bar{z}$ برابر است:

$$\bar{z} = a - ib$$

(۲-۹)

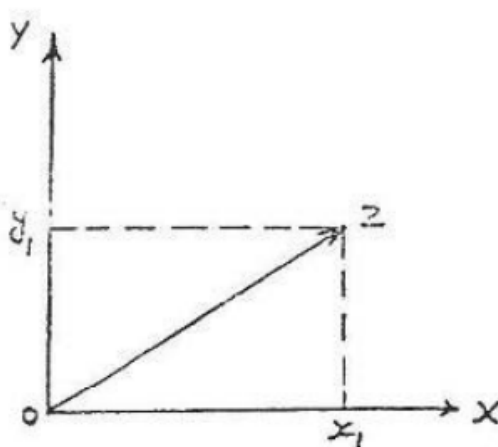
۲-۲ صفحه مختلط

بطوریکه می دانیم فرم کلی یک عدد مختلط مانند Z بصورت زیر است:

$$z = x_1 + iy_1$$

(۲-۱۰)

این عدد را بطور هندسی می توان به یک بردار در یک فضای دو بعدی تفسیر نموده و نمایش داد (شکل ۲-۱).



شکل ۲-۱

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

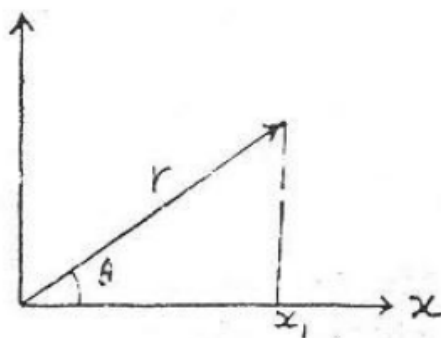
دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

بطوریکه در این شکل می بینیم قسمت حقیقی عدد Z تصویر بردار oz بر روی محور X ها و قسمت موهومی عدد Z تصویر بردار oz است بر روی محور Y ها. همچنین می توان این عدد مختلط را بصورت قطبی زیر نمایش داد (شکل ۲-۲). در این حالت خواهیم داشت:

$$z = r \cos \theta + i . r \sin \theta \quad (2-11)$$

زیرا با توجه به شکل داریم:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta \\ y_1 &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (2-12)$$



شکل ۲-۲

زاویه θ آرگومان عدد Z و r مدول آن نامیده شده و عبارتند از:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y_1}{x_1} \quad (2-13)$$

$$r = |z| = |x + iy| = (x_1^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2-14)$$

صفحه XY صفحه مختلط نامیده می شود.

۲-۳ توابع مختلط

در معادله $(2-15) \quad w = f(z)$ که در آن z عددی است مختلط. اگر به ازاء هر مقدار z یک چند مقدار برای w وجود داشته باشد w را تابع مختلط از متغیر مختلط z می نامیم. همچنین می توان گفت z متغیر مستقل و w متغیر وابسته است. بعنوان مثال تابع $(2-16) \quad w = z^2$ تابعی است که به ازاء هر مقدار یک f تعریف می کند. این چنین توابعی را، یک مقداری یا توابع یک w می نامیم. تابع زیر مثالی است از توابع چند مقداری: $(2-17) \quad w^2 = z$. در بحث تصاویر متشابه تنها توابع یک w مورد توجه است.

بطور کلی w مورد توجه توابع مختلط روابط زیر بر قرار است:

$$w = f(z) = u + i . v = f(x + iy) = u(x, y) + i . v(x, y)$$

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
ممید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

و عدد مزدوج w عبارت است از:

$$\bar{w} = f(\bar{z}) = u(x, y) - i \cdot v(x, y) \quad (2-19)$$

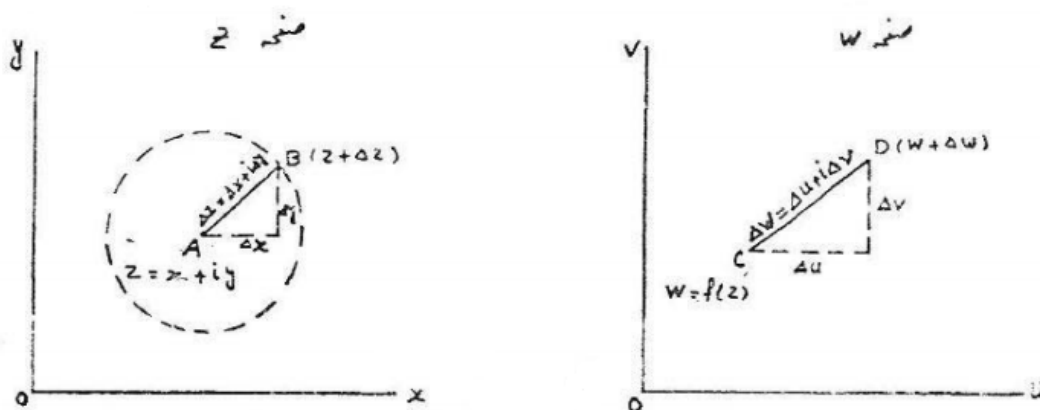
۲-۴- شرط تشابه بر روی دو صفحه مختلط، شروط کوشی و ریمان

در این قسمت ابتدا مشتق یک تابع مختلط تعریف شده و پس از استخراج معادلات کوشی و ریمان، ارتباط این معادلات با شرط تشابه بیان خواهد شد.

دو صفحه Z و w که نقاط واقع بر آنها با معادله

$$w = f(z) = u + i \cdot v = f(x + iy) \quad (2-20)$$

باهم مرتبط اند، تعریف شده اند. در صفحه Z نقطه A و در صفحه w نقطه متناظر آن C را در نظر می گیریم (شکل ۲-۳).



شکل ۲-۳

در صفحه Z به نقطه A نمو Δz داده شده و نقطه B حاصل این مو است. به دنبال این نمو متناظراً نقطه D در صفحه w بدست خواهد آمد. این دو نمو را می توان به ترتیب زیر تعریف نمود:

$$AB = \Delta z = \Delta x + i \Delta y \quad (2-21)$$

$$CD = \Delta w = \Delta u + i \Delta v \quad (2-22)$$

مشتق $f(z)$ عبارت است از:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad (2-23)$$

و چنانچه این عدد وجود داشته باشد مقدار آن باید یکه باشد. چون $w = u + i \cdot v$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ ، بنابراین می توانیم بنویسیم :

$$\Delta w = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) \quad (2-24)$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

۲-۲۱ می توان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + (\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}) \frac{\Delta y}{\Delta x}}{1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad (2-25)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + (\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}) \frac{\Delta y}{\Delta x}}{1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad (2-26)$$

$$f'(z) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + (\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}) \frac{dy}{dx}}{1 + i \frac{dy}{dx}} \quad \text{و یا } (2-27)$$

واضح است که سمت راست رابطه ۲-۲۷ بستگی به مقدار $\frac{dy}{dx}$ دارد و بطوریکه در شکل ۲-۳ می بینیم این مقدار، شیب خط AB است یعنی:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \quad (2-28)$$

بنابراین $f'(z)$ تعریف شده بوسیله رابطه ۲-۲۷ در نقطه $A (z = x + iy)$ یکه نخواهد بود زیرا B می تواند هر نقطه ای واقع بر محیط دایره ای به مرکز A و به شعاع Δz باشد. این واقعیت با شرط یکه بودن مقدار $f'(z)$ متناقض است. در هر نقطه ای $\frac{dy}{dx}$ مقدار خاصی است و بنابراین برای دستیابی به یک مقدار یکه برای $f'(z)$ می باید شرطی را برقرار نمود که بر اساس آن رابطه ۲-۲۷ مستقل از $\frac{dy}{dx}$ شود. بدین منظور دو شرط زیر در نظر گرفته می شود:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad (2-29)$$

$$\frac{dy}{dx} = \infty \quad (2-30)$$

برقراری این شروط معادل موازی نمودن خط AB است به ترتیب با محور x ها و y ها. با اعمال دو شرط معادله ۲-۲۷ بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2-31)$$

$$f'(z) = \frac{1}{i} (\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}) \quad (2-32)$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

ولی با توجه به اینکه در هر نقطه $f'(z)$ می باید مقداری یک باشد شرط دیگری بصورت زیر که طی آن دو مقدار فوق برابر می شود در نظر گرفته می شود:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2-33)$$

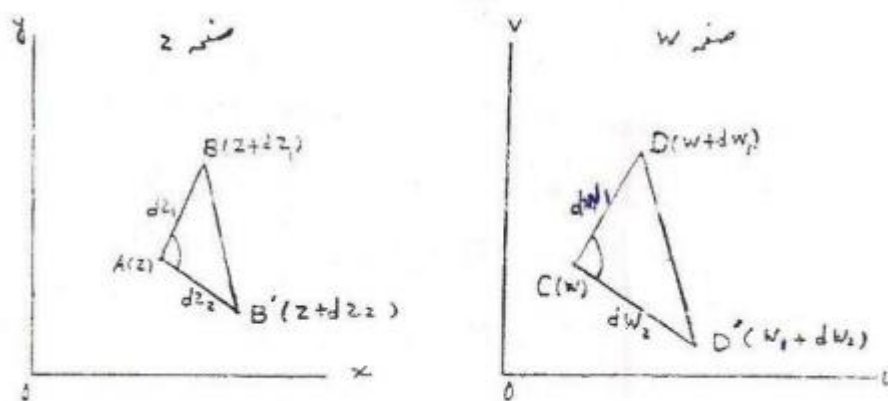
چنانچه قسمت های حقیقی و موهومی تساوی دوم در این رابطه باهم مساوی قرار داده شوند دو شرط زیر که به شروط کوشی و ریمان معروف هستند بدست خواهند آمد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2-34)$$

در بحث فوق ملاحظه می شود که در ارتباط با یافتن معادلات کوشی و ریمان همه جا شرط یک بودن $f'(z)$ مورد توجه و تاکید می باشد. این نکته در این نوع تصاویر حائز اهمیت بسیار زیادی است بطوریکه می توان گفت اساس ریاضی آنها را تشکیل می دهد. برای روشن شدن موضوع شکل ۲-۴ را که همان شکل ۲-۳ با تغییر مختصری است در نظر می گیریم. همچنین رابطه ابتدایی زیر را در تعریف مشتق در نظر خواهیم داشت^{۴۹}:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} \quad (2-35)$$



شکل ۲-۴

در این شکل C, D, D', dw_1, dw_2 به ترتیب متناظر A, B, B', dz_1, dz_2 هستند.

شرط یک بودن $f'(z)$ ، به این نکته است که مقدار آن بستگی به جهت dz ندارد یعنی اگر در هر سری دیفرانسیل z را در نظر بگیریم $f'(z)$ در نقطه $A(z)$ مقداری است ثابت. این موضوع را به زبان ریاضی می توان با رابطه زیر بیان نمود:

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

اندیس های ۱ و ۲ تنها نشان دهنده دیفرانسیل در جهت مخالف است و برای روشن شدن مطلب بکار رفته است.

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$f'(z) = \frac{dw_1}{dz_1} = \frac{dw_2}{dz_2} \quad (2-36)$$

اکنون چنانچه $f'(z)$ را در نقطه $B(z+dz_1)$ در نظر می گیریم. با توجه به یک مقداری بودن تابع مورد بحث، نقاط متناظر $A(z)$ و $B'(z+dz_2)$ (نقاط واقع در همسایگی بی نهایت کوچک نقطه B) همان نقاط (cw) و $D'(w_1+dw_2)$ خواهند بود و بدلیل یک بودن $f'(z)$ در هر نقطه ای از این فضای دو بعدی خواهیم داشت:

$$\frac{dw_1}{dz_1} = \frac{|D'(w+dw_2) - D(w+dw_1)|}{|B'(z+dz_2) - B(z+dz_1)|} \quad (2-37)$$

اکنون با مقایسه دو معادله ۲-۳۶ و ۲-۳۷ به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\frac{dw_1}{dz_1} = \frac{dw_2}{dz_2} = \frac{|D'(w+dw_2) - D(w+dw_1)|}{|B'(z+dz_2) - B(z+dz_1)|} \quad (2-38)$$

این معادله بیان کننده این است که دو مثلث بی نهایت کوچک CDD', ABB' متشابه اند و در نتیجه زاویه مماس رئوس متناظر دو مثلث در دو صفحه برابرند (مانند زاویه A, C) و اصولاً نامگذاری این سیستم تصویر به همین دلیل است یعنی در این سیستم هر شکل هندسی بی نهایت کوچک بصورت مشابه خود تصویر می شود.

نکته مهم در مورد معادلات کوشی و ریمن (معادلات ۲-۳۴) این است که چنانچه از طرفین این معادلات مشتق جزئی نسبت به x, y گرفته شود خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2-38)$$

و بنابراین u, v هر دو در معادلات لاپلاس صدق می کنند یعنی:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \nabla^2 v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (2-39)$$

که نشان دهنده این است که گرادیان تابع برداری در هر نقطه مقدار است ثابت. یعنی مشتق تابع بستگی به جهت مشتق گیری ندارد. در شکل ۲-۴ نسبت یک طول بی نهایت کوچک در صفحه w به طول بی نهایت کوچک متناظرش در صفحه z را $\left(\frac{dw}{dz}\right)^\circ$ می نامند. این مقدار که برابر است با $f'(z)$ در هر نقطه مطابق توضیحات فوق مستقل از جهت مشتق گیری است یعنی بستگی به آزمون ندارد و تنها تابع موقعیت یا عبارت دیگر مختصات نقطه است. هر کمیتی را که به آزمون بستگی نداشته باشد *Isotropic* می نامند. با توجه به این موضوع به تعریف مهم زیر در سیستم تصاویر متشابه دست می یابیم:

«در تصاویر متشابه *scale factor* کمیتی است *Isotropic*»

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده
Scale factor

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

از معادلات ۳۴-۲ (شروط کوشی و ریمان) می توان رابطه زیر را نیز نتیجه گرفت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2-38)$$

که تعبیر هندسی آن این است که دسته منحنی های واقع در صفحه x, y ، متناظر با مقادیر ثابت u, v ، در تمام نقاط شان در زاویه قائم یکدیگر را قطع می کنند.

۲-۵- توابع مختلط خاص

تساوی ها و معادلات ریاضی که در زیر خواهیم دید ر بحث سیستم تصویر متشابه دارای اهمیت اند. اولین تساوی که رابطه بین ضرایب و قوای توابع مثلثاتی را بیان می کند به نظریه «موآور^۱» موسوم است. این نظریه بطور اختصار توضیح داده می شود. بدین منظور چنین می نویسیم:

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

حاصل ضرب دو عدد مختلط عبارت است از:

(۲-۳۹)

$$z_1 z_2 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1)] = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

با تعمیم رابطه فوق در مورد حاصل ضرب n عدد مختلط و با فرض $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta, r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$ خواهیم داشت:

$$z^n = r^n [\cos n\theta + i \sin n\theta] = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n$$

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = [\cos \theta + i \sin \theta]^n \quad \text{و یا (۲-۴۰)}$$

دومین تساوی به فرمول اولر^۲ معروف است که توابع مثلثاتی و نمایی را به هم مربوط می کند. این فرمول بعدا در استخراج معادلات تصویر متشابه لامبرت بکار خواهد رفت. برای بدست آوردن این تساوی ابتدا از بسط زیر استفاده می کنیم:

$$e^\theta = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \dots + \frac{\theta^n}{n!} \quad (2-41)$$

که مشابهاً می توان رابطه زیر را نوشت:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} \quad (2-42)$$

که پس از جدا نمودن قسمت های حقیقی و موهومی رابطه فوق خواهیم داشت:

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده
Moivre^۱
Euler^۲

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$e^{i\theta} = (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{و یا (۲-۴۳)}$$

همچنین با تبدیل $e^{i\theta}$ به $e^{-i\theta}$ در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad \text{(۲-۴۴)}$$

با ترکیب دو رابطه اخیر به روابط مفید زیر خواهیم رسید:

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \text{(۲-۴۵)}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad \text{(۲-۴۶)}$$

آخرین دسته فرمول ها، روابط سینوسی و کسینوسی اعداد مختلط هستند. با جایگزینی z بجای θ در معادلات ۲-۴۵ و ۲-۴۶ خواهیم داشت:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{(۲-۴۷)}$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad \text{(۲-۴۸)}$$

همچنین (۲-۴۹)

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

(۳) مروری بر هندسه دیفرانسیل

منظور از بحث این قسمت مروری است کوتاه بر بخش هایی از هندسه دیفرانسیل. در این قسمت معادلات پارامتریک رویه، مقادیر اصلی و زاویه بین منحنی های پارامتریک مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

۳-۱- معادلات پارامتریک رویه

معادله ضمنی یک رویه عبارت است از:

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{(۳-۱)}$$

و معادلات پارامتریک آن را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} x &= x(\varphi, \lambda) \\ y &= y(\varphi, \lambda) \\ z &= z(\varphi, \lambda) \end{aligned} \quad \text{(۳-۲)}$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

X, Y, Z بعنوان مختصات نقاط واقع بر رویه که می باید تصویر شوند و X, Y بعنوان مختصات نقاط واقع بر صفحه تصویر بکار می روند.

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

x, y, z مختصات کارتزین و φ, λ مختصات منحنی الخط هستند. برای مثال معادله ضمنی کره ای به شعاع R عبارات است از:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (3-3)$$

و معادلات پارامتریک آن $x = x(\varphi, \lambda) = R \cos \varphi \cos \lambda$
 $y = y(\varphi, \lambda) = R \cos \varphi \sin \lambda$ می باشد که φ, λ به ترتیب عرض و طول کروی هستند. به
 $z = z(\varphi, \lambda) = R \sin \varphi$
 همین ترتیب معادلات ضمنی و پارامتریک بیضوی را می توان این چنین نوشت:

$$F = x^2 + y^2 + z^2 - N^2 = 0 \quad (3-4)$$

$$\begin{aligned} x &= N \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= N \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= N (1 - e^2) \sin \varphi \end{aligned} \quad (3-5)$$

که در این معادلات φ, λ به ترتیب عرض و طول ژئودتیک و N شعاع انحناء مقطع قائم اصلی در هر نقطه هستند. با استفاده از معادلات پارامتریک یک رویه می توان هر خم خاصی را بر روی آن مشخص نمود. بعنوان مثال: اگر φ مساوی مقدار ثابت C_1 باشد می توان معادلات پارامتریک آن را بصورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} x &= x(C_1, \lambda) \\ y &= y(C_1, \lambda) \\ z &= z(C_1, \lambda) \end{aligned} \quad (3-6)$$

و یا معادلات پارامتریک خم $\lambda = C_2$ بر روی سطح بصورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} x &= x(\varphi, C_2) \\ y &= y(\varphi, C_2) \\ z &= z(\varphi, C_2) \end{aligned} \quad (3-7)$$

معادلات یک خم اختیاری با $s(\varphi, \lambda)$ نشان داده خواهد شد که در اصل نشان دهنده رابطه خاصی بین φ, λ می باشد.

۳-۲- کمیت های اصلی گوس

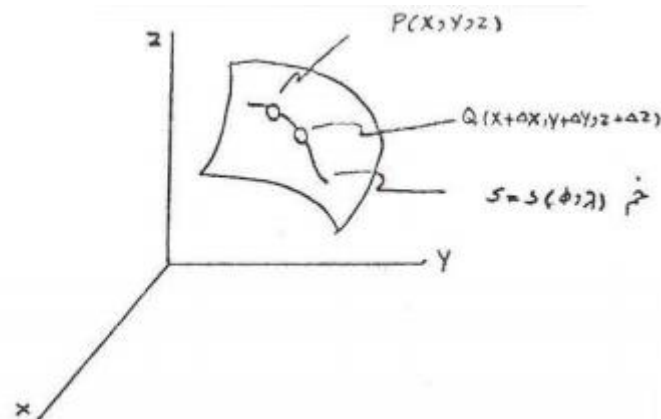
کمیت های اصلی گوس وسیله ای هستند برای بیان خواص هندسی سطحی که می باید بر روی صفحه یا سطح دیگری تصویر شوند.

خمی اختیاری بر روی رویه ای در نظر گرفته و نقطه مانند P به مختصات (x, y, z) و نقطه دیگر به فاصله بی نهایت نزدیک به آن مانند Q به مختصات $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ بر روی آن خم مشخص می کنیم (شکل ۳-۱).

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز



شکل ۳-۱

همچنین طول وتر PQ را با ΔL و کمان PQ را با Δs نشان می دهیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta L^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (3-8)$$

$$\left(\frac{\Delta L}{\Delta s}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)^2 \quad (3-9)$$

و با میل نقطه Q به طرف P ، ΔL به Δs تبدیل شده و خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)^2 = 1 \quad (3-10)$$

که می توان مقادیر $\frac{\Delta x}{\Delta s}$ ، $\frac{\Delta y}{\Delta s}$ ، $\frac{\Delta z}{\Delta s}$ را به کسینوس های هادی خطی روی سطح تعبیر نمود. بنابراین رابطه ۳-۱۰ را می توان بصورت (۳-۱۱) $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ نوشت.

می دانیم:

$$\begin{aligned} x &= x(\varphi, \lambda) \\ y &= y(\varphi, \lambda) \\ z &= z(\varphi, \lambda) \end{aligned} \quad (3-12)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda \end{aligned} \quad (3-13)$$

با استفاده از روابط ۳-۱۳ و جانشین کردن آن ها در فرمول ۳-۱۱ معادله زیر که بین تغییرات در طول کمانی واقع در مختصات منحنی الخط است بدست خواهد آمد:

$$ds^2 = Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2 \quad (3-14)$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \lambda} \quad \text{که در آن (3-15)}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2$$

می باشد. E, F, G به کمیت های اصلی گوس برای یک رویه موسوم اند. مورد استفاده آن ها در قسمت های ۲-۴ و ۳-۴ که در آنجا به ترتیب تعاریف تفصیلی ضریب اشل (مثل scale factor) و شرایط تشابه ارائه خواهند شد.

کمیت های فوق برای بیضوی عبارتند از:

$$E = M^2$$

$$F = 0$$

$$G = N^2 \cos^2 \varphi$$

(3-16)

و بنابراین رابطه ۱۴-۳ در مورد بیضوی بصورت

$$ds^2 = (Md\varphi)^2 + (N \cos \varphi d\lambda)^2 \quad (3-17)$$

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left[\frac{M^2}{N^2} \sec^2 \varphi d\varphi^2 + d\lambda^2 \right] \quad \text{و یا (3-18)}$$

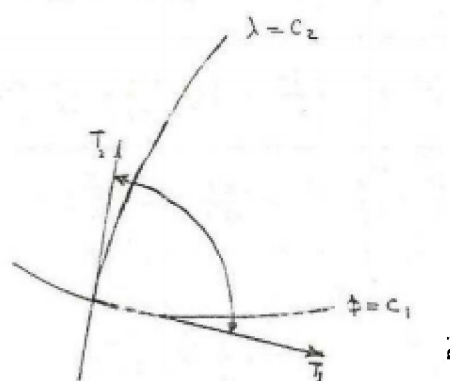
خواهد بود.

۳-۳- زاویه بین منحنی های پارامتریک

در این قسمت اندازه زاویه بین دو خم بر حسب کمیت های اصلی گوس بیان می شود. بدین منظور روابط ۱۳-۳ را برای خم های $\varphi = C_1, \lambda = C_2$ (شکل ۲-۳) بر قرار می کنیم. جدول ۱-۳ نشان دهنده مقادیر (dx, dy, dz) حاصل از برقراری روابط فوق در مورد منحنی های مذکور است.

	$\varphi = C_1$	$\lambda = C_2$
dx	$\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$	$\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi$
dy	$\frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$	$\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi$
dz	$\frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda$	$\frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi$

جدول ۱-۳



شکل ۲-۳

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

همچنین لازم است که دیفرانسیل کلی طول گوس S (معادله ۳-۱۴) برای این منحنی ها محاسبه شود. برای منحنی $\varphi = C_1$ داریم: $d\varphi = 0$ و بنابراین

$$ds_\varphi = \sqrt{G} d\lambda \quad (3-19a)$$

و در مورد $\lambda = C_2$ که $d\lambda = 0$ خواهیم داشت:

$$ds_\lambda = \sqrt{E} d\varphi \quad (3-19b)$$

زاویه θ بین نصف النهار و مدار عبارت از زاویه دو بردار مماس T_1, T_2 (شکل ۳-۲) است و از رابطه :

$$\cos \theta = J_1 J_2 + K_1 K_2 + L_1 L_2 \quad (3-20)$$

حساب می شود. در این معادله J, K, L کسینوس های هادی دو بردار T_1, T_2 می باشند و با استفاده از روابط ۳-۱۹a و ۳-۱۹b بطریق زیر محاسبه می شوند:

$$J_1 = \frac{dx}{ds_\varphi} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}}$$

$$K_1 = \frac{dy}{ds_\varphi} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \quad (3-20a)$$

$$J_1 = \frac{dz}{ds_\varphi} = \frac{\partial z}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}}$$

$$J_2 = \frac{dx}{ds_\lambda} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$J_2 = \frac{dy}{ds_\lambda} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \quad (3-20b)$$

$$J_2 = \frac{dz}{ds_\lambda} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}}$$

که پس از جایگزین کردن روابط ۳-۲۰a و ۳-۲۰b در ۳-۲۰ خواهیم داشت:

$$\cos \theta = \left[\frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right] \frac{1}{\sqrt{EG}} \quad (3-21)$$

با توجه به اینکه مقدار داخل کروشه برابر است با کمیت اصلی گوس F ، معادله زیر بدست می آید:

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (3-22)$$

معادله فوق در مورد هر رویه ای صادق است (مثلا کره - بیضوی - صفحه). این فرمول زاویه بین یک نصف النهار و یک مدار را بیان می کند و می توان آن را برای تعیین یک زاویه و یا اعمال مقدار معینی از θ که مطابقت از شرطی می کند بکار برد.

در مورد بیضوی فرمول فوق نشانگر این واقعیت است که $\theta = 90$ می باشد زیرا همانطور که می دانیم (روابط ۳-۱۶) در $F = 0$ و $G \neq 0$.

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

(۴) تصاویر متشابه بطور کلی

در این قسمت مسئله کلی تصویر متشابه سطح بیضوی روی صفحه شرح داده خواهد شد. مطالبی که در این بخش مورد مطالعه قرار می گیرند عبارتند از: صفحه Isometric، تعریف تفصیلی ضریب اشل (scale factor)، شرط تشابه، تعیین ضریب اشل، هندسه منحنی های تصویر شده و تقارب نصف النهار است.

۴-۱- صفحه Isometric

در بحث تصاویر متشابه با سه رویه سر و کار خواهیم داشت: یکی رویه ای که باید تصویر شود، دیگری صفحه تصویر و سومی صفحه ای است واسطه به نام صفحه Isometric. در ژئودزی رویه اولی رویه بیضوی است. صفحه Isometric با استفاده از معادله ۳-۱۸ تعریف می شود. یاد آوری می شود که در این فرمول داشتیم:

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left[\frac{M^2}{N^2} \sec^2 \varphi d\varphi^2 + d\lambda^2 \right] \quad (۴-۱)$$

با تعریف کمیت جدید γ با رابطه زیر:

$$d\gamma = \frac{M}{N} \sec \varphi d\varphi \quad (۴-۲)$$

معادله ۴-۱ را می توان بصورت زیر نوشت:

$$(۴-۳) \quad ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi [d\gamma^2 + d\lambda^2]$$

با توجه به مقدار داخل کروشه در رابطه فوق می توان دید که این مقدار مربع دیفرانسیل فاصله را بر روی یک صفحه تداعی می کند. این صفحه γ صفحه Isometric نامید می شود. مقادیر مختصات روی این صفحه طول ژئودتیک (λ) و عرض Isometric (γ) می باشند.

برای بیان عرض Isometric بر حسب عرض ژئومتتریک (φ) رابطه زیر بکار می رود:

$$\int_0^{\gamma} d\gamma = \int_0^{\varphi} \frac{M}{N'} \sec \varphi d\varphi \quad (۴-۴)$$

و بطوریکه می دانیم:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (۴-۵)$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (۴-۶)$$

تهیه و تنظیم: حمید جعفرزاده
با قرار دادن مقادیر M ، N از ۴-۶ و ۴-۵ در ۴-۴ داریم:
دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$\int_0^q d\gamma = \int_0^q \frac{(1-e^2) d\gamma}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} = \int_0^q \frac{(1-e^2)(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{(1-e^2) \cos \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} d\varphi \quad (4-7)$$

$$= \int_0^q \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - e^2 \int_0^q \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)} \quad (4-8)$$

نتیجه انتگرال اول عبارت است از:

$$\int_0^q \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \text{Ln} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \quad (4-9)$$

که Ln نشان دهنده لگاریتم طبیعی است. برای تعیین انتگرال دوم تغییر متغیر زیر را اعمال می کنیم:

$$\sin \varphi = p, \cos \varphi dp = dp \quad (4-10)$$

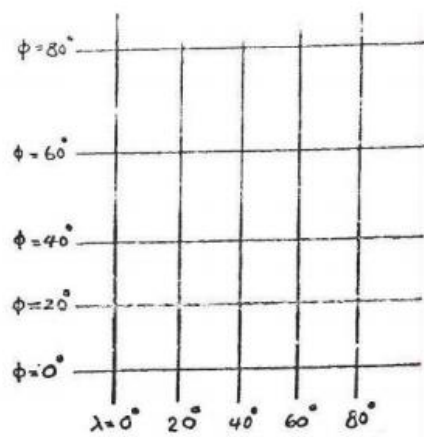
با توجه به این تغییر متغیر خواهیم داشت:

$$e^2 \int \frac{dp}{1-e^2 p^2} = e^2 \text{Ln} \left[\frac{1+ep}{1-ep} \right] = \text{Ln} \left[\frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right]^{\frac{e}{2}} \quad (4-11)$$

و با ترکیب دو انتگرال رابطه زیر بدست می آید:

$$\gamma = \text{Ln} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \quad (4-12)$$

بنابراین می بینیم که به ازای هر مقدار φ یک مقدار γ وجود دارد. در جدول ۴-۱ مقادیر متناظر φ, γ آورده شده بطوریکه در این جدول مشاهده می شود مقدار γ تا $\varphi = 11^\circ$ کمتر از عرض ژئودتیک و از $\varphi = 12^\circ$ مقدار γ بزرگتر از آن است و در $\varphi = 89^\circ$ ، γ به مراتب بزرگتر از φ است. تفسیر هندسی این موضوع آن است که بر روی صفحه ایزومتریک در حالیکه نصف النهارات به موازات هم و به فواصل مساوی هستند. فواصل مدارات یکسان و مساوی نیست برای مثال مدارات شمالی دارای فواصل بیشتری نسبت به مدارات جنوبی می باشند (شکل ۴-۱).



شکل ۴-۱

(مدارات و نصف النهارات روی صفحه ایزومتریک)

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

عرض ژئودتیک (۴)

عرض ایزومتریک (۹)

۱	0.9934132219
۱0	9.9851128986
۱1	10.7956888708
۱2	12.0096232035
20	20.2688725073
30	31.2726570656
40	43.4668126053
50	57.6161578380
60	75.1262119163
70	99.0738773214
75	115.2941916752
80	139.2112650896
85	179.0306399306
86	191.8283987649
87	208.3211451844
88	231.5595670367
89	271.2781638574

جدول 4-1 عرضی ایزومتریک و ژئودتیک

بیشترین ادوات $\frac{1}{4} = 300.8017$

$\alpha = 6377276.345$

چون می باید عرض ژئودتیک (ρ) را از عرض ایزومتریک (γ) محاسبه نمود و لازمه این کار معکوس نمودن معادله ۱۲-۴ است و آن هم امکان پذیر نیست از روش تقریبی در این مورد استفاده می شود. در زیر روش تکرار در این مورد اختصاراً شرح داده می شود.

روش تکرار که در این مورد بکار گرفته می شود متد Newton-Raphson نامیده می شود و بطور خلاصه به شرح زیر است:

معادله غیر خطی $f(x) = 0$ داده شده، مراحل حل عبارتند از:

- ۱- مقدار تقریبی P_0 برای x انتخاب می شود
- ۲- P_n یعنی مقدار حاصل از n تکرار از فرمول (۱۳-۴) $P_n = g(P_{n-1}); n=1,2,\dots$ حساب می شود

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

و تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده (۱۳۹۴)

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

hamid73j@ymail.com

۳- تکرار تا مرحله $|P_n - P_{n-1}| < \varepsilon$ ، که ε حد دقت کامپیوتر است.

۴- حل معادله فوق $x = P_n$ است و دقت آن تا $\pm \varepsilon$ است.

اکنون روش فوق را در مورد عرض ایزومتریک عمل می کنیم. معادله ۴-۱۲ را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\gamma = \frac{1}{2} [Ln(1 + \sin \varphi) - Ln(1 - \sin \varphi) + eLn(1 - e \sin \varphi) - eLn(1 + e \sin \varphi)] \quad (4-15)$$

در این مورد تابع $f(x)$ که مساوی صفر می باشد عبارت است از:

$$f(\varphi) = 0$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{2} [Ln(1 + \sin \varphi) - Ln(1 - \sin \varphi) + eLn(1 - e \sin \varphi) - eLn(1 + e \sin \varphi)] - q = 0 \quad (4-16)$$

$$f'(\varphi) = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} \quad \text{و} \quad (4-17)$$

(یا) مقدار اولیه تقریبی (φ_0) که برای این مسئله در نظر گرفته می شود تقریب کروی است یعنی $e = 0$ ، بنابراین:

$$\gamma = Ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \right] \quad (4-18)$$

که پس از معکوس نمودن این معادله خواهیم داشت:

$$\varphi_0 = 2 \tan^{-1} [\exp(\gamma)] - \frac{\pi}{2} \quad (4-19)$$

در مرحله دوم با توجه به رابطه (۴-۲۰) $g(\varphi) = \varphi - \frac{f(\varphi)}{f'(\varphi)}$ روش تکرار را با استفاده از فرمول:

$$\varphi_n = g(\varphi_{n-1}); n = 1, 2, \dots \quad (4-21)$$

در مورد مجهول مسئله تا n بار اعمال می نماییم و به معادله زیر می رسیم:

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} - \frac{f(\varphi_{n-1})}{f'(\varphi_{n-1})} \quad (4-22)$$

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} - (\Delta \varphi)_{n-1} \quad (4-23)$$

و در نهایت محاسبه $|\Delta \varphi_{n-1}| < \varepsilon$ ادامه می یابد.

۴-۲ تعریف ضریب اشل

ضریب اشل در هر نقطه واقع بر صفحه تصویر نشان دهنده میزان اعوجاج (distortion) در طول است. البته علت این اعوجاج اعمال شرط ^{نقطه} تصویر یا سایر شروطی است که برای ایجاد یک تصویر خاص لازم است. رابطه بین مختصات یک نقطه واقع بر

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
حمید جعفرزاده

سطح بیضوی و نقطه متناظرش واقع بر صفحه تصویر، نباید با مفهوم اشل خط (Line Scale) که بعداً تعریف خواهد شد اشتباه شود.

در بخش ۲-۳ دیدیم که در بیضوی نصف النهارات بر مدارات عمودند و چون سیستم تصویر متشابه است تصویر این منحنی ها بر صفحه تصویر نیز بر هم عمود خواهد بود. شرط عمود بودن مدارات و نصف النهارات در ریاضیات با صفر قرار دادن F (دومین کمیت اصلی گوس) بیان می شود. بنابر معادله ۱۴-۳، می توان مربع یک کمان بی نهایت کوچک روی بیضوی را بصورت:

$$ds_1^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 \quad (4-24)$$

نوشت که معادل آن بر روی صفحه نقشه معادله زیر را خواهیم داشت^۴:

$$ds_2^2 = dx^2 + dy^2 \quad (4-25)$$

$$k^2 = \frac{ds_2^2}{ds_1^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2} \quad (4-26)$$

ضریب اشل را با استفاده از دو رابطه زیر بر حسب عرض ایزومتریک و طول ژئودزیک می توان بدست آورد:

$$\begin{aligned} x &= f_1(\gamma, \lambda) \\ y &= f_2(\gamma, \lambda) \end{aligned} \quad (4-27)$$

با توجه به رابطه ۱۴-۳، ds_2^2 را می توان بصورت:

$$ds_2^2 = ed\gamma^2 + 2f d\gamma d\lambda + gd\lambda^2 \quad (4-28)$$

نوشت که در آن:

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 \quad (4-29)$$

$$f = \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) \quad (4-30)$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 \quad (4-31)$$

و چون اندازه زوایا روی بیضوی و روی صفحه نقشه می باید مساوی باشند، بنابراین:

$$ds_1^2 = ed\gamma^2 + gd\lambda^2 \quad (4-32)$$

اکنون می توان ضریب اشل را با معادله زیر نشان داد:

$$k^2 = \frac{ds_2^2}{ds_1^2} = \frac{ed\gamma^2 + gd\lambda^2}{N^2 \cos^2 \varphi (d\gamma^2 + d\lambda^2)} \quad (4-33)$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

X, Y بکار برده می شود.

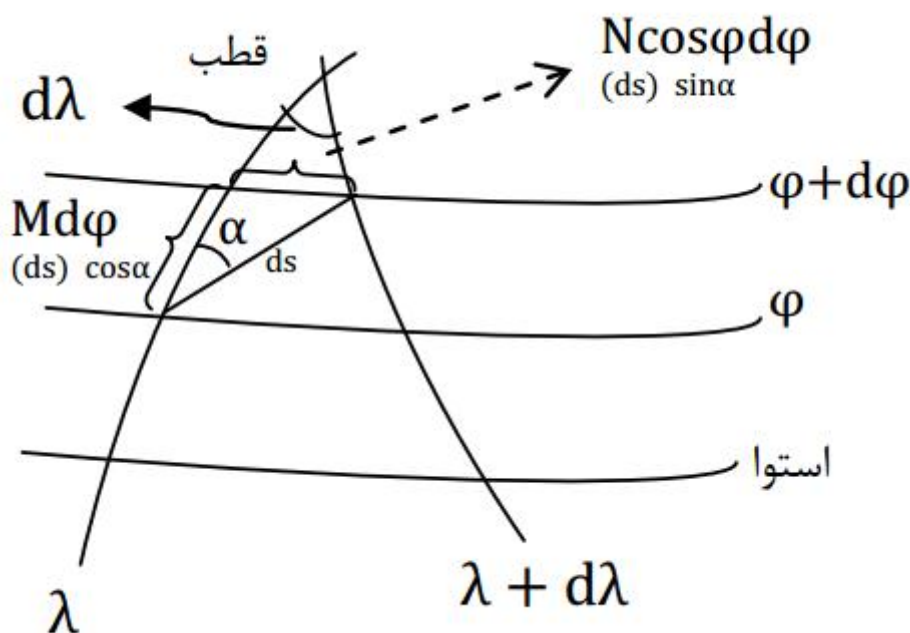
hamid73j@ymail.com

۴-۳- شرط تشابه بین صفحه نقشه و صفحه ایزومتریک

در این قسمت معادلاتی که بین شرط تشابه دو صفحه تصویر (نقشه) و ایزومتریک است بدست آمده و سپس بصورت معادلات کوشی و ریمان ارائه خواهند شد. از شکل ۴-۲ داریم:

$$\tan \alpha = \frac{N \cos \varphi}{M} d\lambda \quad (4-34)$$

که در آن α آزیموت ژئودتیک است.



شکل ۴-۲

قبلا نیز $d\gamma$ بصورت (۴-۳۵) $d\gamma = \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi}$ تعریف شد که با جایگزین نمودن آن در معادله ۴-۳۴ خواهیم داشت:

$$\tan \alpha = \frac{d\lambda}{d\gamma} \quad (4-36)$$

$$d\lambda = \tan \alpha d\gamma \quad \text{و یا (۴-۳۷)}$$

اکنون با جانشینی این مقدار بجای $d\lambda$ در معادله ۴-۳۳ مقدار ضریب اشل بعنوان تابعی از امتداد بصورت زیر بدست می آید:

$$k^2 = \frac{e \cos^2 \alpha + g \sin^2 \alpha}{N^2 \cos^2 \varphi} \quad (4-38)$$

ولی بطوریکه می دانیم در تصاویر متشابه ضریب اشل مستقل از امتداد است. بنابراین بر قرار نمودن شرط تشابه چنین ایجاب می کند که معادله فوق مستقل از امتداد (آزیموت) باشد که در نتیجه خواهیم داشت:

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
حمید جعفرزاده

$$k^2 = \frac{e}{N^2 \cos^2 \varphi} = \frac{e}{N^2 \cos^2 \varphi} \quad (4-38a)$$

بنابراین شرط تشابه را بر حسب کمیت های اصلی گوس می توان بر حسب معادلات زیر بیان نمود:

$$f = 0 \quad (4-39)$$

$$e = g \quad (4-40)$$

معادلات کوشی و ریمان را می توان با بکار بردن معادلات ۴-۴۰ و ۴-۳۹ با معادلات ۴-۳۱، ۴-۳۰ و ۴-۲۹ بدست آورد که به ترتیب e, f, g را بر حسب x, y, γ, λ بیان می کنند. ابتدا از معادله ۴-۳۹ شروع می کنیم. داریم:

$$f = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \gamma} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0 \quad (4-41)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = - \frac{\frac{\partial x}{\partial \gamma} \frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\frac{\partial y}{\partial \gamma}} \quad (4-42) \text{ و}$$

همچنین با معادله ۴-۴۰ خواهیم داشت:

$$e = g$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 \quad (4-43)$$

از بکار بردن $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$ از معادله ۴-۴۲ در ۴-۴۳ رابطه زیر حاصل خواهد شد:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2}{\left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2} \quad (4-44)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2}{\left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 \right] \quad (4-45) \text{ و یا}$$

معادله فوق تنها در دو حالت زیر بر قرار خواهد بود:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 = 0 \quad (4-46)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2$$

تهیه و تنظیم:
(۴-۴۷) و یا حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

از معادله ۴-۴۷ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \pm \frac{\partial y}{\partial \gamma} \quad (4-48)$$

با در نظر گرفتن معادله بالا با علامت مثبت و جایگزین نمودن آنها در معادله ۴-۴۱ تساوی زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} = -\frac{\partial y}{\partial \lambda} \quad (4-49)$$

معادله فوق همراه معادله ۴-۴۸ با علامت مثبت معادلات کوشی و ریمان هستند یعنی:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \frac{\partial y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial x}{\partial \gamma} &= -\frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (4-50)$$

البته انتخاب معادله ۴-۴۸ با جواب منفی نیز شروط کوشی و ریمان بدست خواهند داد منتهی بصورت زیر:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= -\frac{\partial y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial x}{\partial \gamma} &= \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (4-51)$$

همانطور که قبلا نیز ذکر شد، معادلات فوق بیان کننده شرط تشابه در سیستم تصویر بوده و در تعریف و تعیین توابع f_2, f_1 بصورت زیر:

$$x + iy = f_1(\lambda + i\gamma) \quad (4-52)$$

$$\lambda + i\gamma = f_2(x + iy) \quad (4-53)$$

بکار می روند.

۴-۴ تعیین ضریب اشل

در این قسمت فرمول تعیین ضریب اشل با فرض معلوم بودن تابع f_1 (معادله ۴-۵۲) ارائه می شود. یادآوری می گردد که داشتیم:

$$k^2 = \frac{ds_2^2}{ds_1^2} = \frac{ed\gamma^2 + gd\lambda^2}{N^2 \cos^2 \varphi (d\gamma^2 + d\lambda^2)} \quad (4-54)$$

در جبر اعداد مختلط رابطه ای بصورت زیر وجود دارد:

$$dw d\bar{w} = du^2 + dv^2 = f'(z)f'(\bar{z})(dx^2 + dy^2) \quad (4-55)$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

که در آن $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$, $\bar{w} = u - iv$, $\bar{z} = x - iy$ می باشد. اثبات این رابطه، ساده و بصورت زیر است:

$$dw \, d\bar{w} = (du + i \, dv)(du - i \, dv) = du^2 + dv^2 \quad (4-55a)$$

$$= f'(x + iy) f'(x - iy) (dx + i \, dy)(dx - i \, dy) = f'(z) f'(\bar{z}) (dx^2 + dy^2)$$

و با توجه به رابطه :

$$f'(\bar{z}) = f'(x - iy) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) f'(\bar{z}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (4-55b) \text{ و}$$

خواهیم داشت:

$$dw \, d\bar{w} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] (dx^2 + dy^2) = \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] (dx^2 + dy^2)$$

از معادله 4-55 در این بحث بصورت زیر استفاده می شود:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = f'(\lambda + i\gamma) f'(\lambda - i\gamma) (d\lambda^2 + d\gamma^2) \quad (4-56)$$

و با توجه به این رابطه، معادله 5-54 را بصورت :

$$k^2 = \frac{f'(\lambda + i\gamma) f'(\lambda - i\gamma) (d\gamma^2 + d\lambda^2)}{N^2 \cos^2 \varphi (d\gamma^2 + d\lambda^2)} \quad (4-57)$$

$$k^2 = \frac{f'(\lambda + i\gamma) f'(\lambda - i\gamma)}{N^2 \cos^2 \varphi} \quad (4-58)$$

معادله فوق با استفاده از رابطه 4-58b که در این بحث بصورت :

$$f'(\lambda + i\gamma) f'(\lambda - i\gamma) = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \quad (4-59)$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma} \right)^2 \quad (4-60)$$

با قرار دادن معادله 4-60 و 4-59 در رابطه 4-58 نتیجه نهایی برای تعیین ضریب بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$k = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2}}{N \cos \varphi} \quad (4-61)$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$k = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2}}{N \cos \varphi}$$

(۴-۶۲)

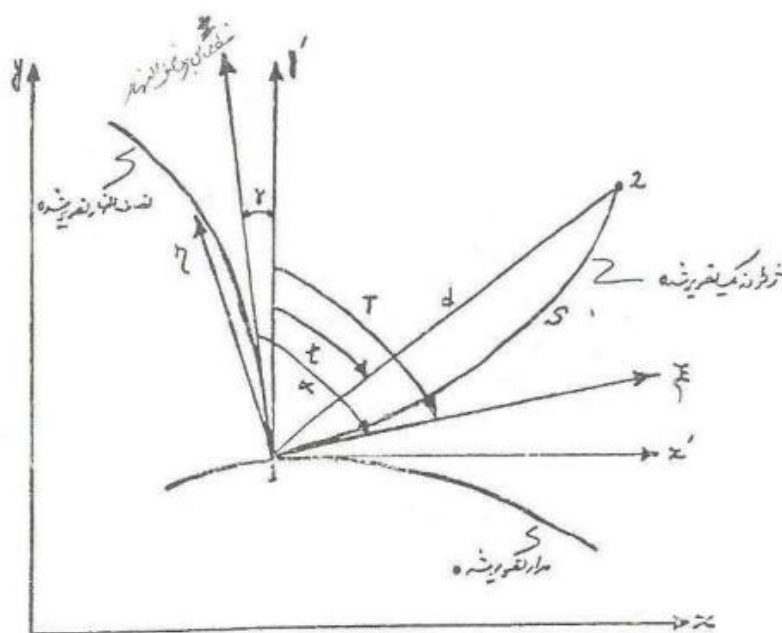
کاربرد این دو فرمول بستگی به شرایط خاصی دارد که در سیستم تصویر متشابه مورد نظر بایستی برقرار باشد. مثلاً معادله ۴-۶۱ برای تعیین ضریب اشل در ترانسورس مرکاتور که در آن $x = x(\lambda)$ است بکار می رود در حالیکه از فرمول ۴-۶۲ در سیستم مخروطی لامبرت استفاده می شود زیرا در آن $x = x(\gamma)$ است.

۴-۵- روابط هندسی منحنی های تصویر شده

در این بخش شکل نصف النهارات، مدارات و ژئودزیک های تصویر شده بر صفحه تصویر (نقشه) و روابط آنها نسبت به سیستم شبکه نشان داده شده و مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در شکل ۳-۴ دو نقطه ۱ و ۲ که از بیضوی بر روی صفحه نقشه تصویر شده همراه با ژئودزیک گذرنده بر نقطه ۱ و مماس های بر این منحنی نشان داده شده است. در این شکل سه سیستم مختصات ملاحظه می شود که عبارتند از: سیستم مختصات نقشه (سیستم شبکه) که با x, y مشخص شده، سیستم مختصات شبکه منتقل شده که با x', y' نشان داده شده و سیستم مختصات ژئودزیک که با η, ξ مشخص گردیده است. توجه سیستم اخیر به این نحو است که محور ξ مماس بر ژئودزیک در نقطه ۱ و محور η عمود بر آن در این نقطه می باشد. محور y' با خط مماس بر نصف النهار زاویه ای بنام ϕ می سازد که این زاویه تقارب نصف النهار است.

آزیموت ژئودتیک α ژئودتیک تصویر شده زاویه ای است که از خط مماس بر نصف النهار در جهت حرکت عقربه های ساعت تا مماس بر ژئودزیک تصویر شده اندازه گیری می شود. T ، آزیموت شبکه، زاویه ای است بین محور y' تا مماس بر ژئودزیک تصویر شده. این زاویه نیز در جهت عقرب های ساعت اندازه گیری می شود. آزیموت شبکه t نیز در جهت حرکت عقربه های ساعت اندازه گیری شده و نشان دهنده زاویه بین محور y' وتر واصل بین نقاط ۱ و ۲ است.



شکل ۳-۴

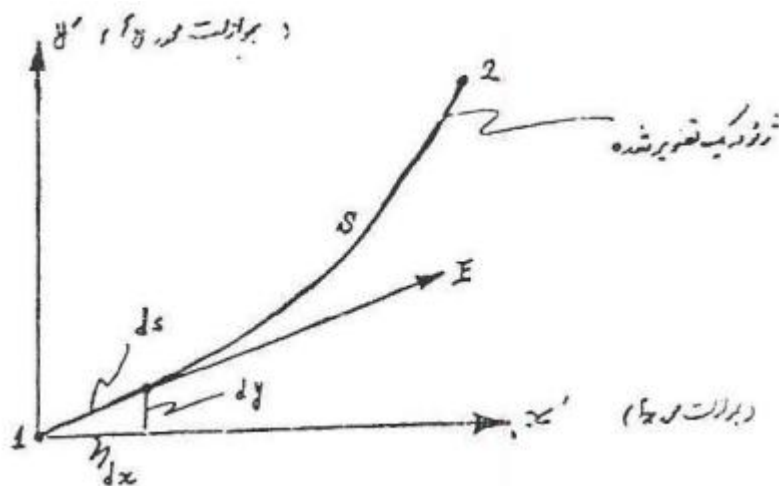
تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

در این قسمت فرمول کلی برای محاسبه تقارب نصف النهارات بر حسب توابعی عمومی و کلی در عرض ایزومتریک و طول ژئودتیک λ ارائه می شود.

با توجه به تعاریف شکل ۳-۴ زاویه β را بعنوان زاویه بین محورهای x, y تعریف می کنیم (شکل ۴-۴).



شکل ۴-۴

با توجه به این شکل می توان نوشت:

$$\tan \beta = \frac{dy}{dx} \quad (۴-۶۳)$$

معادله ژئودزیک تصویر شده بر حسب γ, λ عبارت است از:

$$f(\gamma, \lambda) = 0 \quad (۴-۶۴)$$

و معادله پارامتریک این خم بصورت :

$$\begin{aligned} x &= x(\gamma, \lambda) \\ y &= y(\gamma, \lambda) \end{aligned} \quad (۴-۶۵)$$

می باشد که پس از دیفرانسیل گیری از این معادلات خواهیم داشت:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \quad (۴-۶۶)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \quad (۴-۶۷) \text{ و}$$

که از جایگذاری این مقادیر در رابطه ۴-۶۳ مقادیر زیر برای $\tan \beta$ حاصل خواهد شد:

تنظیم و تایید:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$\tan \beta = \frac{\frac{\partial y}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda} \quad (4-68)$$

$$\tan \beta = \frac{\frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d\gamma}}{\frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d\gamma}} \quad \text{و یا (4-69)}$$

یادآوری می شود که در معادله ۴-۳۶ داشتیم:

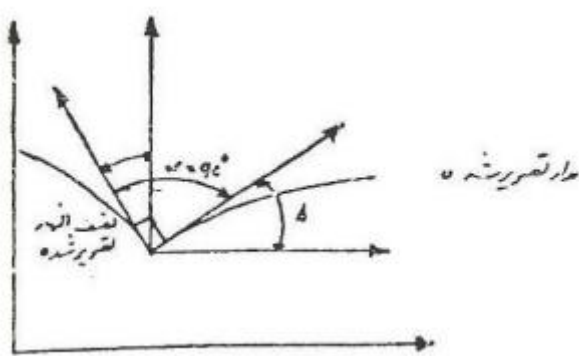
$$\frac{d\lambda}{d\gamma} = \tan \alpha \quad (4-70)$$

که پس از قرار دادن این مقدار در رابطه ۴-۶۹ خواهیم داشت:

$$\tan \beta = \frac{\frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \tan \alpha}{\frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \tan \alpha} \quad (4-71)$$

$$\tan \alpha = - \frac{\frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial x}{\partial \gamma} \tan \beta}{\frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \tan \beta} \quad \text{و (4-72)}$$

فرمول بالا رابطه ای است کلی و اساس که برای یافتن فرمول تقارب نصف النهار از آن استفاده می کنیم. شکل ۴-۵ را که در آن :



شکل ۴-۵

مقادیر زیر برای α و β فرض شده در نظر می گیریم:

$$\beta = \beta$$

$$\alpha = 90^\circ$$

(4-73) تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده (4-74)

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

فرمول ۴-۷۱ را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\tan \beta = \frac{\frac{1}{\tan \alpha} \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{1}{\tan \alpha} \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial x}{\partial \lambda}} \quad (4-75)$$

که پس از جایگذاری روابط ۴-۷۴ و ۴-۷۳ در ۴-۷۵ خواهیم داشت:

$$\tan \varphi = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} \quad (4-76)$$

همچنین با استفاده از معادلات کوشی و ریمان یعنی:

$$\frac{\partial y}{\partial \gamma} = \frac{\partial x}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\frac{\partial x}{\partial \gamma}$$

می توانیم بنویسیم:

$$\tan \varphi = \frac{-\frac{\partial x}{\partial \gamma}}{\frac{\partial y}{\partial \gamma}} \quad (4-77)$$

هر دو عبارت فوق در تعیین تقارب نصف النهارات از اعتبار ریاضی برخوردارند ولی مورد استفاده آنها بستگی به سیستم های تصویر و شرایط خاص آنها دارد. مثلاً از معادله ۴-۷۷ در سیستم تصویر مخروطی لامبرت و از معادله ۴-۷۶ در سیستم ترانسورس مرکاتور استفاده خواهد شد.

۵) تصویر مرکاتور

این سیستم تصویر در حدود سال ۱۵۵۰ بطور عملی بوسیله مرکاتور^{۵۵} ابداع شد. هدف مرکاتور از این کار ایجاد سیستم تصویری بود که در آن منحنی لوکسدروم^{۵۶} (رجوع شود به قسمت ۵-۵) بر روی صفحه تصویر به شکل خطوط مستقیم تصویر شوند. حدود چهل سال بعد رایت^{۵۷} توزیعی ریاضی از این سیستم بدست آورد. برای ایجاد یک چنین تصویری لازم است دو شرط زیر رعایت شود:

الف- ضریب اشل در طول استوا حقیقی باشد.

ب- مبدا محور u ها در استوا واقع باشد.

تمپیه و تنظیم:

Merator^{۵۵}

Xodrome^{۵۶}

Wright^{۵۷}

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

در این قسمت به ترتیب مسئله مستقیم، ضریب اشل، تقارب نصف النهارات، شکل سیستم تصویر مرکاتور لوکسدروم و مسئله معکوس مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۵-۱- مسئله مستقیم

مسئله مستقیم عبارت است از تعیین مختصات نقشه یعنی x, y با استفاده از φ, λ عبارت دیگر تعیین تابع f در رابطه زیر:

$$x + iy = f(\lambda + i\gamma) \quad (5-1)$$

باید توجه داشت که جانشینی γ در این عبارت بجای φ مسئله ای است که در کلیه سیستم های تصویر عمومیت دارد زیرا صفحه ایزومتریک واسطه ای است بین سطح بیضوی و صفحه نقشه و می توان با بکار بردن معادله ۴-۱۲، φ را به γ تبدیل نمود. بر قراری شرط «الف» مذکور در بالا برقراری رابطه زیر را ایجاب می نماید:

$$x = a\lambda \quad (5-2)$$

که در آن a نصف قطر اطول بیضوی است. همچنین برای بر قراری شرط «ب» لازم است در استوا داشته باشیم:

$$\varphi = \gamma = y = 0 \quad (5-3)$$

تحت این شرایط تابع مختلط f بصورت (۵-۴) $x + iy = a(\lambda + i\gamma)$ خواهد بود. صحت رابطه فوق را می توان از برقراری معادلات کوشی و ریمان در مورد آن تحقیق نمود یعنی:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial y}{\partial \gamma} = a$$

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} = -\frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$

و

بنابراین با جداسازی قسمت های حقیقی و موهومی در ۵-۴ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x &= a\lambda \\ y &= a\gamma \end{aligned} \quad (5-5)$$

باید توجه داشت که واحد x, y همان واحد a است زیرا واحد های λ, γ رادیان می باشد.

۵-۲- ضریب اشل

یادآوری می شود که در فرمول ۴-۶۱ داشتیم:

$$k = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{N \cos \varphi}$$

با توجه به معادله ۵-۵ می توان نوشت:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = a \text{ و } \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$$

با توجه به معادله ۵-۵ می توان نوشت:
(۵-۶) حمید جعفرزاده
دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

بنابراین در این سیستم تصویر فرمول ضریب اشل بصورت زیر خواهد بود:

$$k = \frac{a}{N \cos \varphi} \quad (5-7)$$

اعوجاج اشل در طول استوا صفر بوده و با تزايد عرض ژئودزیک اضافه می شود. در $\varphi = 90^\circ$ میزان اعوجاج بی نهایت خواهد بود که مفهوم آن این است که نقطه قطب مانند خطی شبیه یک مدار تصویر می شود.

۵-۳- تقارب نصف النهارات

فرمول کلی تقارب نصف النهارات در قسمت قبل در فرمول ۴-۷۶ به شکل زیر بدست آمد:

$$\tan \gamma = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}$$

با استفاده از این معادله در مورد تصویر مرکاتور خواهیم داشت:

$$\tan \gamma = \frac{0}{a} = 0$$

$$\gamma = 0 \quad \text{و} \quad (5-8)$$

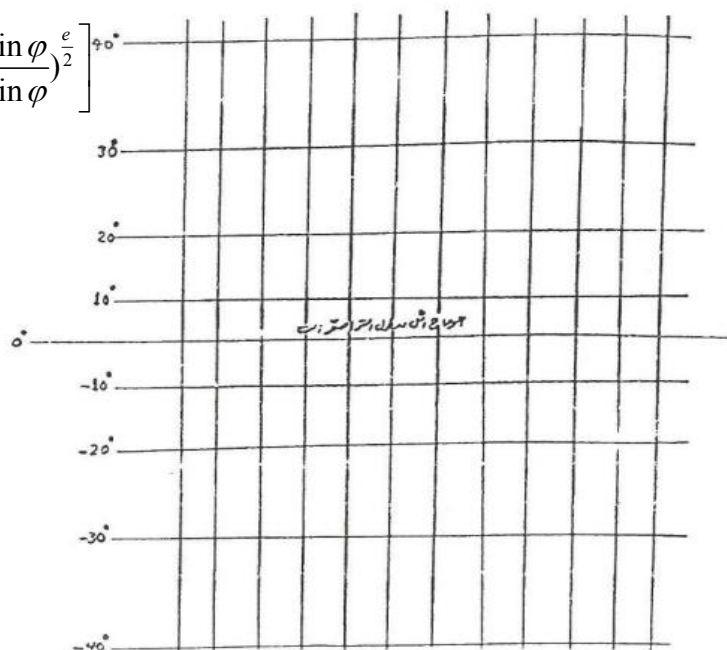
این بدان معناست که در این سیستم تصویر محور y شبکه بر مماس بر نصف النهار تصویر شده منطبق است.

۵-۴- شکل تصویر مرکاتور

ظاهر تصویر مرکاتور با توجه به عواملی که در زیر ذکر گردیده بصورت زیر است (شکل ۵-۱):

$$x = a\lambda$$

$$y = a\gamma \rightarrow \gamma = \text{Ln} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]$$



شکل ۵-۱

۵-۵

۱- $\gamma = 0$

۲- در استوا $k = 1$

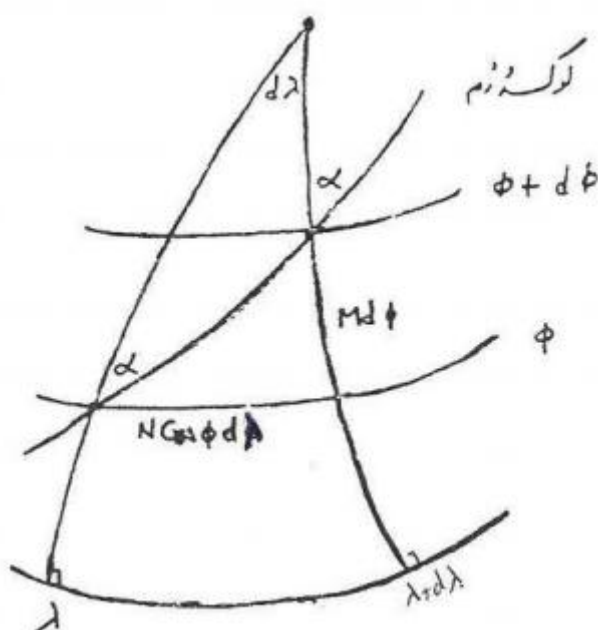
۳- مدارات و نصف النهارات در زاویه ۹۰ درجه یکدیگر را قطع می کنند

۴- فواصل نصف النهارات مساوی است

۵- فواصل بین مدارات با دور شدن از استوا افزایش می یابد.

۵-۵- لوکسدروم (Loxodrome)

لوکسدروم یا *rumb-line* خمی است بر روی بیضوی که نصف النهارات را با زاویه ثابت قطع می کند یعنی دارای آزمون ثابت است. همانگونه که در شروع این بحث اشاره شد در تصویر مرکاتور خم لوکسدروم بصورت خطی مستقیم در صفحه نقشه تصویر می شود.



شکل ۵-۲

با توجه به شکل بالا (شکل ۵-۲) داریم:

$$\tan \alpha = \frac{N \cos \varphi}{M} \cdot \frac{d\lambda}{d\varphi} \quad (5-9)$$

$$d\lambda = \tan \alpha \frac{M}{N} \sec \varphi d\varphi \quad \text{و} \quad (5-10)$$

پس از انتگرال گیری از طرفین معادله فوق خواهیم داشت:

$$\lambda - \lambda_0 = q \tan \alpha \quad (5-11)$$

$$\lambda = q \tan \alpha + \lambda_0$$

تهیه و تنظیم:

و یا (حمید) جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

که معادله ای است برای لوکسدروم روی سطح بیضوی بر حسب q و با داشتن معادلات تصویر یعنی:

$$q = \frac{y}{a}$$

$$\lambda = \frac{x}{a}$$

و جایگزینی آن ها در ۵-۱۲، معادله لوکسدروم بر روی صفحه تصویر بصورت:

$$x = y \tan \alpha + a \lambda_0 \quad (5-13)$$

بدست خواهد آمد. بطوریکه ملاحظه می شود رابطه فوق معادله خطی است مستقیم با ضریب زاویه $\tan \alpha$ و مقدار ثابت $a \lambda_0$.

۵-۶- مسئله معکوس^{۵۸}

مسئله معکوس عبارت است از محاسبه φ, λ در حالیکه x, y در دست باشند. برای حل این مسئله مراحل زیر بایستی حل شوند:

۱- محاسبه طول ژئودتیک λ از فرمول:

$$\lambda = \frac{x}{a} \quad (5-14)$$

۲- محاسبه γ با استفاده از رابطه:

$$\gamma = \frac{y}{a} \quad (5-15)$$

۳- محاسبه عرض ژئودتیک φ متناظر با γ بدست آمده از معادله بالا با استفاده از فرمول ۴-۱۲ و روش تکرار ذکر شده در قسمت ۴-۱.

۴- تصویر ترانسورس مرکاتور^{۵۹}

این سیستم تصویر متشابه که امروزه کاربرد وسیعی در عمل دارد در سال ۱۷۷۲ بوسیله «یوهان هنریخ لامبرت^{۶۰}» ابداع گردید ولی مانند هر روش دیگری در ابتدا بر پایه اصولی ابتدایی استوار و احتمالاً طریقی هندسی بوده است. حدود پنجاه سال بعد گوس بر این تکنیک، تحلیلی ریاضی نگاشت و نشان داد که در حقیقت این تصویر حالت خاصی از تصویر متشابه رویه ای است بر روی دیگر. پس از گوس در سال ۱۹۱۲ کروگر^{۶۱} کار او را در جهت توسعه فرمول های این سیستم تعقیب نمود و معادلاتی بدست آورد که برای محاسبات عملی کاملاً مناسب است (مانند فرمول های ۲۶-۶ و ۲۵-۶) و به این ترتیب می بینیم که چه خلاقیت زیبایی در این رشته در مدتی حدود یک قرن و در سه مرحله بوجود آمد.

برای ایجاد ترانسورس مرکاتور سه نکته می باید رعایت شود:

^{۵۸} Transverse Mercator Projection

^{۵۹} Transverse Mercator Projection

^{۶۰} Johann Heinrich Lambert

^{۶۱} L. Krüger

۱- اشل در طول نصف النهار مرکزی حقیقی باشد

۲- مبدا محور y ها (ordinate) در استوا باشد

۳- مبدا محور x ها (abscissa) در نصف النهار مرکزی باشد.

مطالبی که در این قسمت مورد مطالعه قرار می گیرند عبارتند از: مسئله مستقیم، ضریب اشل بر حسب مختصات ژئودتیک، تقارب نصف النهارات بر حسب مختصات ژئودتیک، شکل ظاهری تصویر ترانسورس مرکاتور، مسئله معکوس، ضریب اشل بر حسب مختصات نقشه، تقارب نصف النهارات بر حسب مختصات نقشه و سیستم جهانی ترانسورس مرکاتور^{۱۲} که اختصاراً UTM نشان داده می شود.

۶-۱- مسئله مستقیم

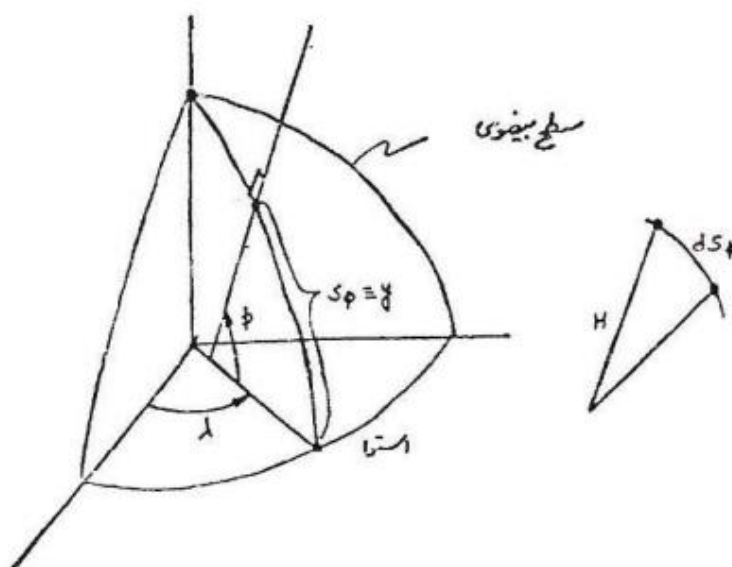
بطور کلی نتایج مختلط تصویر بصورت $(۶-۱) \quad x + iy = f(\lambda + i\gamma)$ است و مسئله مستقیم عبارت از تعیین تابع خاصی است که سه خاصیت ذکر شده در بالا در آن صدق نماید. سومین شرط چنین ایجاب می نماید که در مورد نصف النهار مرکزی روابط زیر برقرار باشد:

$$x = \lambda = 0 \quad (۶-۲)$$

با توجه به این رابطه از معادله ۶-۱ می توان چنین نتیجه گرفت که:

$$\begin{aligned} iy &= f(i\gamma) \\ y &= f(\gamma) \end{aligned} \quad (۶-۳)$$

از طرف دیگر لازمه برقراری شرط اول این است که مقدار y در صفحه تصویر معادل طول نصف النهاری s_ϕ روی بیضوی باشد (شکل ۶-۱)



شکل ۶-۱

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

Universal Transverse Mercator

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

طول نصف النهار از استوا تا نقطه مورد نظر با انتگرال (۴-۶) $y = s_{\varphi} = \int_0^{\varphi} M d\varphi$ بدست می آید. همچنین با توجه به رابطه:

$$M d\varphi = N \cos \varphi d\gamma \quad (۵-۶)$$

انتگرال ۴-۶ را می توان بصورت زیر نوشت:

$$y = \int_0^{\varphi} N \cos \varphi d\gamma \quad (۶-۶)$$

$$y = f(\gamma)$$

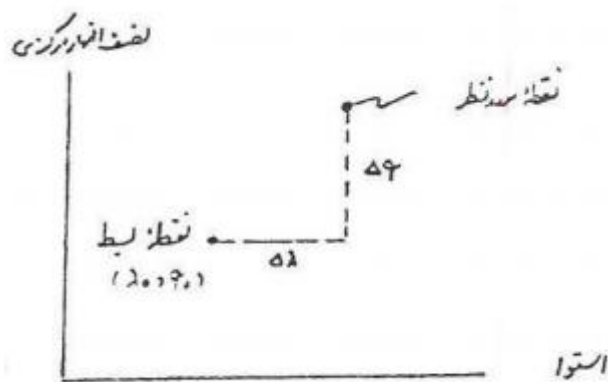
بنابر این رابطه، می توان تابع f را برای نقاط واقع بر نصف النهار مرکزی تعیین نمود.

مرحله بعد تعمیم طریقی است برای نقاط خارج از نصف النهار مرکزی ولی در این مورد باید در نظر داشت که این نقاط باید از حدود سه درجه دورتر از نصف النهار باشند زیرا چنانکه خواهیم دید برای تعیین تابع f در این نقاط از بسط سری ها استفاده می شود و چنانکه می دانیم این بسط ها از نظر ریاضی در همسایگی آن نقاط می توان انجام داد. برای این نقاط مقدار x صفر نیست و مقدار y برابر طول نصف النهار از استوا تا نقطه مورد نظر نمی باشد.

جوابی ریاضی و مطلق برای این مسئله وجود ندارد و تنها می توان مقداری تقریبی برای آن یافت و بدین منظور تابع تصویر یعنی:

$$x + iy = f(\lambda + i\gamma)$$

را حول نقطه اختیاری به مختصات λ_0, γ_0 به سری تیلور بسط می دهیم (شکل ۲-۶).



شکل ۲-۶

$$x + iy = f(\lambda + i\gamma) \quad (۷-۶)$$

$$= f[\lambda_0 + \Delta\lambda + i(\gamma_0 + \Delta\gamma)] = f[\lambda_0 + i\gamma_0 + (\Delta\lambda + i\Delta\gamma)] = f(z_0 + \Delta z) = f(z)$$

در این مرحله می توان بسط تابع $f(z)$ را به سری تیلور چنین نوشت:

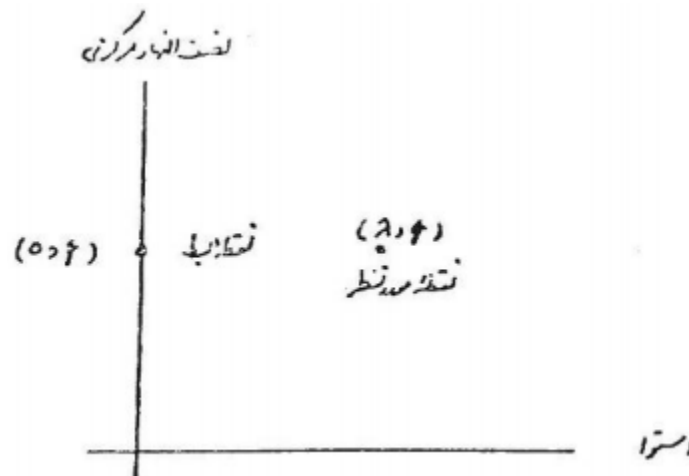
$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\Delta z + \frac{f''(z_0)(\Delta z)^2}{2!} + \frac{f'''(z_0)(\Delta z)^3}{3!} + \dots$$

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
حمید جعفرزاده
(۸-۶)
همیشه و تنظیم:

و یا

$$f(\lambda + i\gamma) = x + iy = f(\lambda_0 + i\gamma_0) + f'(\lambda_0 + i\gamma_0)(\Delta\lambda + i\Delta\gamma) + f''(\lambda_0 + i\gamma_0) \frac{(\Delta\lambda + i\Delta\gamma)^2}{2!} + \dots \quad (6-9)$$

در این بحث، زمانی می توان از معادلات فوق استفاده نمود که نقطه بسط را بر روی نصف النهار مرکزی در محلی که γ نقطه مورد نظر را بعنوان مختصات دارا باشد (شکل ۳-۶)، بنابراین خواهیم داشت:



شکل ۳-۶

$$\lambda_0 = 0 \quad (6-10)$$

$$\Delta\gamma = 0$$

$$\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma = \gamma_0 \quad (6-11)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \Delta\lambda$$

با قرار دادن معادله ۶-۱۱ در ۶-۹ چنین نتیجه می گیریم:

$$x + iy = f(i\gamma) + f'(i\gamma)\lambda + \frac{f''(i\gamma)\lambda^2}{2!} + \frac{f'''(i\gamma)\lambda^3}{3!} + \dots \quad (6-12)$$

برای تعیین این تابع و مشتقاتش دوباره به فرمولی که طول قطعه ای از نصف النهارات را بدست می دهد رجوع می کنیم:

$$s_\varphi = f(\gamma) = \int_0^\varphi N \cos \varphi d\gamma \quad (6-13)$$

به این ترتیب خود تابع عبارت خواهد بود از:

$$f(i\gamma) = if(\gamma) = i \int_0^\varphi N \cos \varphi d\gamma \quad (6-14)$$

تهیه و تنظیم:
مشتق بصورت:
و اولین ممید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$f'(i\gamma) = f'(z) = \frac{df(z)}{f(z)} = \frac{df(z)}{d\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{f(z)} = \frac{i df(\gamma)}{d\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{dz} \quad (6-15)$$

$$z = i\gamma, \gamma = \frac{1}{i}z \quad \text{خواهد بود زیرا داریم: (6-16)}$$

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{1}{i} = -i \quad \text{و (6-17)}$$

$$f'(i\gamma) = \frac{i df(\gamma)}{d(\gamma)} \cdot (-i) = \frac{df(\gamma)}{d(\gamma)} \quad (6-18)$$

$$f'(i\gamma) = f'(\gamma) \quad (6-19)$$

و به همین ترتیب دومین مشتق عبارت است از:

$$f''(i\gamma) = \frac{df'(i\gamma)}{dz} = \frac{d}{dz} \left\{ \frac{df(\gamma)}{d\gamma} \right\} = \frac{d}{d\gamma} \left\{ \frac{df(\gamma)}{d\gamma} \right\} \frac{d\gamma}{dz}$$

$$f''(i\gamma) = f''(\gamma)(-i) \quad (6-20)$$

مشتق های مراتب بالاتر نیز با همین رویه بدست خواهند آمد یعنی خواهیم داشت:

$$f'''(i\gamma) = -f'''(\gamma)$$

$$f^{IV}(i\gamma) = -f^{IV}(\gamma) \quad (6-21)$$

$$f^V(i\gamma) = -f^V(\gamma)$$

با جانشین نمودن مقدار تابع و مشتقاتش از معادلات فوق در معادله ۶-۱۲ بسط تابع زیر بدست می آید:

$$x + iy = f(\lambda + i\gamma) = f(i\gamma) + f'(\gamma)\lambda + \frac{(-i)f''(\gamma)\lambda^2}{2!} - \frac{f'''(\gamma)\lambda^3}{3!} + \frac{if''(\gamma)\lambda^2}{4!} + \dots$$

که با جدا نمودن قسمت های حقیقی و موهومی این رابطه را خواهیم داشت:

$$x = \lambda f'(\gamma) - \frac{f'''(\gamma)\lambda^3}{3!} + \frac{f^V(\gamma)\lambda^5}{5!} - \frac{f^{VII}(\gamma)\lambda^7}{7!} + \dots$$

$$y = f(\gamma) - \frac{f''(\gamma)\lambda^2}{2!} + \frac{f^{IV}(\gamma)\lambda^4}{4!} - \frac{f^{VI}(\gamma)\lambda^6}{6!} + \dots \quad (6-22a)$$

مقادیر x, y را می توان پس از مشخص نمودن λ, γ تعیین نمود. باید در نظر داشت که طول ژئودتیک نقطه ای که در شرق نصف النهار مرکزی واقع باشد مثبت است یعنی (نقطه $\lambda = \lambda_{CM} - \lambda$) و γ نیز بر حسب φ محاسبه می شود.

در روابط ۶-۲۱، ۶-۲۰، ۶-۱۹ و ۶-۱۴ مقادیر $f(i\gamma)$ و مشتقات متوالی اش را بر حسب کمیت حقیقی $f(\gamma)$ و مشتقاتش بدست آورده ایم و این کمیت ها نیز می بایست گسترش داده شوند تا برای محاسبات مناسب گردند. مقدار اولین مشتق با استفاده از معادله ۶-۱۵ می توان چنین نوشت:

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
ممید جعفرزاده

$$f'(\gamma) = \frac{ds_\varphi}{d\gamma} = \frac{d\{f(\gamma)\}}{d\gamma} = N \cos \varphi$$

و دومین مشتق نیز عبارت است از:

$$f''(\gamma) = \left[\frac{dN}{d\varphi} \cos \varphi - N \sin \varphi \right] \frac{d\varphi}{d\gamma}$$

که طبق تعریف عرض ایزومتریک داریم:

$$\frac{d\varphi}{d\gamma} = \frac{N}{M} \cos \varphi$$

(۶-۲۳)

$$\frac{dN}{d\varphi} = (N - M) \tan \varphi$$

$$f''(\gamma) = -\frac{N}{2} \sin 2\varphi$$

بنابراین: (۶-۲۴)

به همین ترتیب می توان مشتقات مراتب بالاتر را نیز محاسبه نمود که برای رعایت اختصار از نوشتن آنها در این کتاب خودداری می شود. نتایج حاصل از این مقادیر پس از جایگذاری در ۶-۲۲a چنین بدست می آید:

$$\begin{aligned} \frac{x}{N} = & \lambda \cos \varphi + \frac{\lambda^3 \cos^3 \varphi}{6} (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\lambda^5 \cos^5 \varphi}{120} (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2 \eta^2 + \\ & 13\eta^2 + 4\eta^6 + 67\eta^4 t^2 - 24\eta^4 t^2) + \frac{\lambda^7 \cos^7 \varphi}{5040} (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6) \end{aligned} \quad (۶-۲۵)$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{N} = & \frac{s_\varphi}{N} + \frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^4}{24} \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \\ & \frac{\lambda^6}{720} \sin \varphi \cos^5 \varphi (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2 \eta^2 + 445\eta^4 + 324\eta^6 \\ & - 680\eta^4 t^2 + 88\eta^8 - 600\eta^6 t^2 - 192\eta^8 t^2) + \frac{\lambda^8}{40320} \sin \varphi \cos^7 \varphi (1385 - 311t^2 + 543t^4 - t^6) \end{aligned} \quad (۶-۲۶)$$

در این فرمول ها λ برحسب رادیان است و

$$s_\varphi = \int_0^\varphi M d\varphi$$

$$t = \tan \varphi \quad (۶-۲۷)$$

$$\eta^2 = (e')^2 \cos^2 \varphi \quad (۶-۲۸)$$

$$(e')^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (۶-۲۹)$$

تهیه و تنظیم: حمید مجفرازاده

معادلات تصویف فوق مقادیر x, y را با دقت 0.001 متر برای $\lambda = \pm 3^\circ$ بدست می دهد.

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

۶-۲- تقارب نصف النهارات بر حسب مختصات ژئودتیک

یادآوری می شود که در معادله ۴-۷۶ تقارب نصف النهارات بصورت:

$$\tan \varphi = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} \quad (۶-۳۰)$$

بدست آمد. چنانچه از معادلات ۶-۲۶ و ۶-۲۵ بر حسب λ دیفرانسیل گرفته شده و سپس در معادله ۶-۳۰ قرار داده شود خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tan \varphi = \lambda \sin \varphi \left[1 + \frac{\lambda^2}{3} \cos \varphi (1 + t^2 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \right. \\ \left. \frac{\lambda^4 \cos^4 \varphi}{15} (2 + 4t^2 + 2t^4 + 15\eta^2 + 35\eta^4 - 40t^2 \eta^4 + 33\eta^6 - 60t^2 \eta^6 + 18\eta^8 - 24t^2 \eta^8) + \right. \\ \left. \frac{17}{315} (1 + t^2)^3 \lambda^6 \cos^6 \varphi \right] \quad (۶-۳۱) \end{aligned}$$

این عبارت پس از استفاده از بسط سری $\arctan$ یعنی (طرف راست عبارت فوق) $\varphi = \tan^{-1}$ چنین نتیجه می دهد:

$$\varphi = \lambda \sin \varphi \left[1 + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{3(\rho'')^2} (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{\lambda^4 \cos^4 \varphi}{13(\rho'')^4} (2 - t^2) \right] \quad (۶-۳۲)$$

در این معادله λ, φ برحسب رادیان و $\rho'' = \csc 1''$ است. عبارت فوق گرد شده است و می توان آن را برای دستیابی به دقت $0.01''$ برای φ تا 3° دورتر از نصف النهار مرکزی بکار برد. لازم به ذکر است که تقارب نصف النهار با دور شدن از نصف النهار مرکزی افزایش می یابد.

۶-۳- ضریب اشل بر حسب مختصات ژئودتیک

در معادله ۴-۶۱ ضریب اشل را بصورت عبارت کلی :

$$k = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{N \cos \varphi} \quad (۶-۳۳)$$

بدست آوریم. این معادله را می توان با استفاده از مربع رابطه ۶-۳۰ یعنی :

$$\tan^2 \varphi = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 (1 + \tan^2 \varphi)$$

تهیه و تنظیم:

و یا (۶-۳۴) **ممید جعفرزاده**

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$k = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda} \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}{N \cos \varphi}$$

بصورت زیر نوشت: (۶-۳۵)

چون $\tan^2 \varphi$ مقدار کوچکی است می توان رادیکال موجود در این عبارت را بر حسب سری بسط داد که پس از تعیین مشتق جزئی خواهیم داشت:

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) + \frac{\lambda^4 \cos^4 \varphi}{24} (5 - 4t^2 + 14\eta^2 + 13\eta^4 - 28t^2 \eta^2 + 4\eta^6 - 48t^2 \eta^4 - 24t^2 \eta^6) + \frac{\lambda^6 \cos^6 \varphi}{720} (61 - 148t^2 + 16t^4)$$

(۶-۳۶)

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) + \lambda^4 \cos^4 \varphi (5 - 4t^2)$$

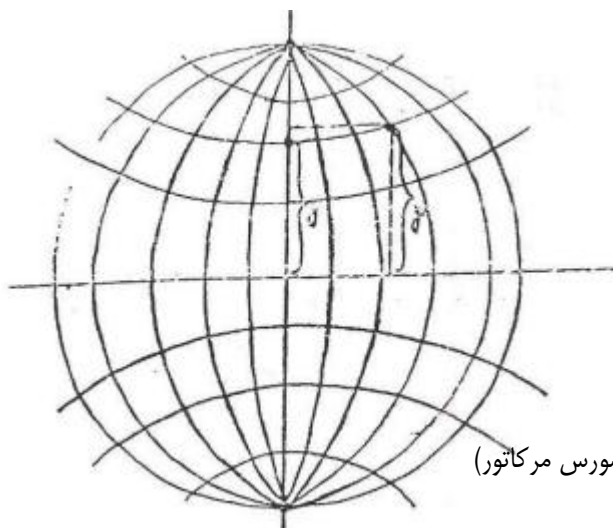
گرد شده رابطه فوق را می توان بصورت :

نوشت که این مقدار ممکن است یک یا دو واحد در رقم هشتم اعشار خطا داشته باشد. باید توجه داشت که ضریب اشل با افزایش λ یعنی با زیاد شدن فاصله از نصف النهار مرکزی اضافه می شود و در طول یک نصف النهار، این کمیت با افزایش عرض ژئودتیک نقصان می یابد.

۶-۴- شکل ظاهری تصویر ترانسورس مرکاتور

شکل ظاهری این سیستم را با توجه به شرایط خاصی که در این سیستم بایستی برقرار باشد و درباره آنها بحث شد، می توان با توجه به شکل ۶-۴ و چهار نکته زیر دریافت:

- ۱- در طول نصف النهار مرکزی $k = 1$ و بنابراین دو قطب بصورت دو نقطه بر روی صفحه نقشه تصویر می شوند بطوریکه مقادیر λ آنها معادل با طول نصف النهاری بین هر قطب و خط استوا می باشد.
- ۲- برای نقاط خارج از نصف النهار مرکزی مقدار λ (که در مورد این نقاط با λ' نشان داده شده است) (شکل ۶-۴) بزرگتر از مقدار λ نقطه ای است که روی همان مدار ولی روی نصف النهار مرکزی واقع است.
- ۳- با دور شدن از نصف النهار مرکزی مقدار φ یعنی تقارب نصف النهار افزایش می یابد
- ۴- مدارات و نصف النهارات در زاویه ۹۰ درجه یکدیگر را قطع می کنند.



شکل ۶-۴ تهیه و تنظیم شده توسط مهندس جعفرزاده (شکل ظاهری ترانسورس مرکاتور)

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

مسئله مستقیم به فرم معادله ای بصورت:

$$x + iy = f(\lambda + i\gamma) \quad (6-38)$$

بیان گردید. در قیاس با این فرم می توان مسئله معکوس را نیز بصورت معادله ای مانند :

$$\lambda + i\gamma = F(x + iy) \quad (6-39)$$

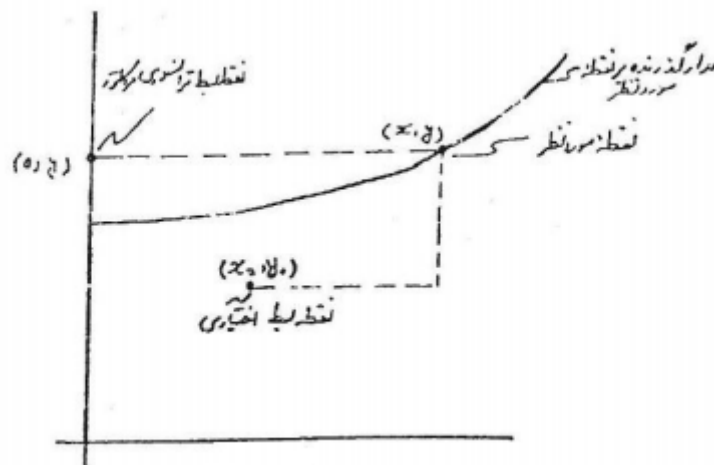
که در آن F معادله تصویری است که می باید تعیین شود و با تابع f در مسئله مستقیم تفاوت دارد.

حل مطلق ریاضی برای مسئله موجود نیست ولی می توان مقدار تقریبی آن را با استفاده از بسط به سری تیلور بدست آورد. نقطه بسط را در شروع کار نقطه ای اختیاری روی صفحه نقشه به مختصات x_0, y_0 انتخاب می کنیم (شکل ۶-۵). بنابراین خواهیم داشت:

$$\lambda + i\gamma = (\lambda_0 + i\gamma_0) + (\Delta\lambda + i\Delta\gamma) = F(x_0 + iy_0) + F'(x_0 + iy_0)(\Delta x_0 + i\Delta y_0) + \frac{F''(x_0 + iy_0)}{2!}(\Delta x_0 + i\Delta y_0)^2 + \dots \quad (6-40)$$

$$F(x + iy) = F(z_0) + F'(z_0)\Delta z + \frac{F''(z_0)(\Delta z)^2}{2!} + \frac{F'''(z_0)(\Delta z)^3}{3!} + \dots \quad (6-41)$$

اکنون نقطه مناسب تری را بعنوان نقطه بسط در این سری انتخاب می کنیم. این نقطه ، نقطه ای است به مختصات $(0, y)$: (رجوع شود به شکل ۶-۵)



شکل ۶-۵

بنابراین خواهیم داشت:

$$x_0 = 0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x = \Delta x, (\lambda = \Delta\lambda)$$

$$y_0 = u \Rightarrow \Delta y = 0, (\Delta\gamma = 0)$$

(۶-۴۲) تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده (۶-۴۳)

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

و پس از قرار دادن نتایج بدست آمده فوق در ۴۰-۶ رابطه زیر بدست می آید:

$$\lambda + i\gamma = F(iy) + F'(iy)x + \frac{F''(iy)x^2}{2!} + \frac{F'''(iy)x^3}{3!} + \dots \quad (۶-۴۴)$$

باید توجه داشت که بر روی نصف النهار مرکزی داریم:

$$x = 0 \quad (۶-۴۵)$$

$$i\gamma = F(iy)$$

توجیه هندسی معادله فوق در شکل ۶-۶ نشان داده شده است. در این شکل دو مدار مشاهده می شود که یکی مدار گذرنده بر نقطه مورد نظر و دیگری مدار گذرنده بر نقطه ای واقع بر نصف النهار مرکزی با γ مساوی با γ نقطه مورد نظر، عرض ژئودتیک نقطه مورد نظر φ و عرض ژئودتیک نقطه اخیر φ_1 می باشد که آن را عرض ژئودتیک نقطه مبنا یا نقطه پایه می نامند. متناظر با φ_1 عرض ایزومتريک نقطه مبنا نیز تعریف می شود و با γ_1 نشان داده می شود و به این ترتیب معادله ۴۵-۶ را می توان بصورت $i\gamma_1 = F(iy)$ (۶-۴۶) نوشت.

به منظور آماده ساختن معادلات ۴۴-۶ برای محاسبات عملی می بایست $F(iy)$ و مشتقاتش را بدون در نظر گرفتن اندیس ۱ تعیین کنیم. اولین مشتق عبارت است از:

$$F'(iy) = \frac{dF(iy)}{d(iy)} = \frac{d(i\gamma)}{d(iy)} = i \frac{d\gamma}{ds_\gamma} \cdot \frac{ds_\gamma}{d(iy)} \quad (۶-۴۷)$$

که بطور کلی:

$$iy = is_\varphi \quad (۶-۴۸)$$

و بطور اختصار داریم:

$$iy = is_{\varphi_1} = is_{\gamma_1} \quad (۶-۴۹)$$

بنابراین آخرین مشتق در رابطه ۴۷-۶ را می توان چنین نوشت:

$$\frac{ds_\gamma}{ids_\gamma} = \frac{1}{i} \quad (۶-۵۰)$$

اگر چنین تعریف کنیم که:

$$\frac{d\gamma}{ds_\gamma} = \gamma' \quad (۶-۵۱)$$

بنابراین معادله ۴۷-۶ را بصورت زیر خواهیم داشت:

$$F'(iy) = \gamma' \quad (۶-۵۲)$$

تهیه و تنظیم از:
دومین همیشه عبارت است از:
دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
حمید جعفرزاده

$$F''(iy) = \frac{d\left(\frac{d\gamma}{ds_\varphi}\right)}{d(iy)} = \frac{d\left(\frac{d\gamma}{ds_\gamma}\right)}{ds_\gamma} \cdot \frac{ds_\gamma}{d(is_\gamma)} = \gamma'' \cdot \frac{1}{i} \quad (6-53)$$

$$F''(iy) = -i \gamma'' \quad (6-54)$$

به همین ترتیب می توان مشتقات مراتب بالاتر را بدست آورد که عبارتند از:

$$\begin{aligned} F'''(iy) &= -\gamma''' \\ F^{IV}(iy) &= i \gamma^{IV} \\ F^V(iy) &= \gamma^V \\ &\dots \end{aligned} \quad (6-55)$$

با دو باره قرار دادن اندیس ۱ برای فرض نقطه مبنا در تابع و مشتقاتش رابطه ۴۴-۶ را بصورت:

$$\lambda + i \gamma = i \gamma_1 + x \gamma_1' - \frac{i \gamma_1'' x^2}{2!} - \frac{\gamma_1''' x^3}{3!} + \frac{i \gamma_1^{IV} x^4}{4!} + \dots \quad (6-56)$$

خواهیم داشت که پس از جدا نمودن قسمت های حقیقی و موهومی این معادله بصورت تفکیک شده زیر:

$$\lambda = x \gamma_1' - \frac{\gamma_1''' x^3}{3!} + \frac{\gamma_1^V x^5}{5!} + \dots \quad (6-57)$$

$$\gamma = \gamma_1 - \frac{\gamma_1'' x^2}{2!} + \frac{\gamma_1^{IX} x^4}{4!} + \dots \quad (6-58)$$

تبدیل خواهد شد. باید توجه داشت که معادله ۵۸-۶ اختلاف $\Delta \gamma = \gamma - \gamma_1$ بین دو عرض ایزومتریک را بدست می دهد که در تعیین عبارت نهایی برای عرض ژئودتیک از آن استفاده می شود (معادله ۶۵-۶).

در این مرحله مقادیر واقعی $\gamma_1', \gamma_1'', \dots$ را محاسبه نموده و سپس در معادلات فوق قرار می دهیم. یادآوری می شود که:

$$s_\gamma = \int_0^\varphi N \cos \varphi d\gamma \quad (6-59)$$

اولین مشتق عبارت است از:

$$\gamma' = \frac{d\gamma}{ds_\gamma} = \frac{1}{N \cos \varphi} \quad (6-60)$$

و مشتق دوم و سوم را به ترتیب بصورت زیر می توان تعیین نمود:

$$\gamma'' = \frac{d^2 \gamma}{ds_\gamma^2} = \frac{t}{N^2 \cos \varphi} \quad (6-61)$$

$$\gamma''' = \frac{d^3 \gamma}{ds_\gamma^3} = \frac{1}{N^3 \cos \varphi} (1 + 2t^2 + \eta^2)$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

(۶-۶۲)

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

مشتقات مراتب بالاتر را نیز می توان به همین تعیین نمود و در اینجا برای رعایت اختصار از نوشتن آنها خودداری می شود. با قرار دادن این مقادیر در روابط ۶-۵۸ و ۶-۵۷ عبارت زیر بجای طول ژئودتیک (λ) بدست می آید:

$$\lambda = \sec \varphi_1 \left[\frac{x}{N_1} - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{N_1} \right)^3 (1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{120} \left(\frac{x}{N_1} \right)^5 (5 + 6\eta_1^2 + 28t_1^2 - 3\eta_1^4 + 8t_1^2 \eta_1^2 + 24t_1^4 - 4\eta_1^6 + 4t_1^2 \eta_1^4 + 24t_1^2 \eta_1^6) - \frac{1}{5040} \left(\frac{x}{N_1} \right)^7 (61 + 662t_1^2 + 1320t_1^4 + 720t_1^6) \right] \quad (6-63)$$

که در آن اندیس ۱ نشان دهنده این است که در تعیین λ باید از عرض ژئودتیک نقطه مبنا (φ_1) استفاده شود. همچنین t_1, η_1 را با معادلات ۶-۲۹ و ۶-۲۷ می توان بدست آورد. دقت فرمول فوق برای λ کمتر از 3° از نصف النهار مرکزی بعلاوه یا منهای 0.00001 ثانیه کمائی است. تعیین عبارتی مشابه برای عرض ژئودتیک φ قدری مشکل تر است. برای این کار لازم است عبارتی برای $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_1$ بعنوان تابعی از اختلاف $\Delta\gamma = \gamma - \gamma_1$ بدست آورد که در چنین صورتی φ را می توان با فرمول (۶-۶۴) $\varphi = \varphi_1 + \Delta\varphi = \varphi_1 + g(\Delta\gamma)$ محاسبه نمود. یادآوری می شود که φ_1 عرض ژئودتیک نقطه مبنا متناظر با یک طول نصف النهاری γ است. اکنون $\Delta\varphi$ را به سری تیلور برحسب $\Delta\gamma$ بسط می دهیم:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_1 = g(\Delta\gamma) = \Delta\gamma \frac{d\varphi_1}{d\gamma_1} + \frac{\Delta\gamma^2}{2!} \frac{d^2\varphi_1}{d\gamma_1^2} + \frac{\Delta\gamma^3}{3!} \frac{d^3\varphi_1}{d\gamma_1^3} + \dots \quad (6-65)$$

با توجه به تعریف عرض ایزومتريک یعنی:

$$\frac{d\varphi_1}{d\gamma_1} = \frac{N_1 \cos \varphi_1}{M_1} = (1 + \eta_1^2) \cos \varphi_1 \quad (6-66)$$

دومین مشتق را می توان بصورت:

$$\frac{d^2\varphi_1}{d\gamma_1^2} = \frac{N_1}{M_1} t_1 \cos^2 \varphi_1 (2 - 3 \frac{N_1}{M_1}) = -(1 + \eta_1^2)(1 + 3\eta_1^2) t_1 \cos^2 \varphi_1 \quad (6-67)$$

محاسبه نمود. به همین ترتیب مشتقات مراتب بالاتر را می توان تعیین نمود که در اینجا نیز برای رعایت اختصار نوشته نمی شوند. با جایگذاری مشتقات γ (۶-۶۲، ۶-۶۱ و ۶-۶۰) در ۶-۵۸ و $\Delta\gamma$ حاصل از این جایگذاری در ۶-۶۵ همراه با مشتقات φ_1 (۶-۶۷ و ۶-۶۶) در ۶-۶۵ معادله نهائی برای تعیین عرض ژئودتیک بصورت زیر بدست می آید:

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{t_1 x^2}{2M_1 N_1} + \frac{t_1 x^4}{24M_1 N_1^3} (5 + 3t_1^2 + \eta_1^2 - 4\eta_1^4 - 9\eta_1^2 t_1^2) - \frac{t_1 x^6}{720M_1 N_1^5} (61 - 90t_1^2 + 46\eta_1^2 + 45t_1^4 - 252t_1^2 \eta_1^2 - 3\eta_1^4 + 100\eta_1^6 - 66t_1^2 \eta_1^4 - 90t_1^4 \eta_1^2 + 88\eta_1^8) + \frac{t_1 x^8}{40320M_1 N_1^7} (1385 + 3633t_1^2 + 4095t_1^4 + 1575t_1^6) \quad (6-68)$$

$$t_1 = \tan \varphi_1$$

که در آن: $\eta_1^2 = (e')^2 \cos^2 \varphi_1$ می باشد. دقت این فرمول نیز $0.00001''$ در حدود 3° از نصف النهار مرکزی است.

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز
حمید جعفرزاده

۶-۶- تقارب نصف النهارات بر حسب مختصات نقشه

بطوریکه می دانیم در مسئله معکوس، مختصات نقشه یعنی x, y داده می شوند. در این قسمت تقارب نصف النهارات تنها بعنوان تابعی از X ارائه می شود. از معادلات و برای مقدار ثابتی از γ داریم:

$$\tan \varphi = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} = - \frac{\frac{\partial y}{\partial \gamma}}{\frac{\partial x}{\partial \gamma}} = \frac{dy}{dx} \quad (6-69)$$

واضح است که بطور کلی $\gamma = \gamma(x, y)$ است که برای γ ثابت می توان نوشت:

$$d\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial x} dx + \frac{\partial \gamma}{\partial y} dy = 0 \quad (6-70)$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial x}}{\frac{\partial \gamma}{\partial y}} = - \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \gamma}}$$

بنابراین:

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial x}}{\frac{\partial \gamma}{\partial y}} = - \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \gamma}} \quad (6-71)$$

زیرا بر اساس معادلات کوشی و ریمان داریم:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad (6-72)$$

مشتقات ۶-۷۱ با دیفرانسیل گیری از ۶-۵۷ ($\lambda = \lambda(x)$) و ۶-۵۸ ($\gamma = \gamma(x)$) تعیین می شوند. در زیر نتیجه این محاسبات نوشته می شود:

$$\tan \varphi = - \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial x}}{\frac{\partial \lambda}{\partial x}} = - \frac{x \gamma_1'' + \frac{x^3}{6} \gamma_1'''' + \frac{x^5}{120} \gamma_1'''' + \dots}{\gamma_1' - \frac{x^2}{2} \gamma_1''' + \frac{x^4}{24} \gamma_1' + \dots} \quad (6-73)$$

با قرار دادن مشتقات جزئی از معادلات ۶-۶۲ تا ۶-۶۰ در این معادله چنین نتیجه می شود:

$$\tan \varphi = \frac{t_1}{N_1} x - \frac{t_1}{3} \left(\frac{x}{N_1} \right)^3 (1 - \eta_1^2 - 2\eta_1^4) + \frac{t_1}{15} \left(\frac{x}{N_1} \right)^5 (2 + 2\eta_1^2 + 9\eta_1^4 + 6t_1^2 \eta_1^2 + 20\eta_1^6) + 3t_1^2 \eta_1^4 - 27t_1^2 \eta_1^6 + 11\eta_1^8 - 24t_1^2 \eta_1^8 - \frac{17t_1}{315} \left(\frac{x}{N_1} \right)^7 \quad (6-74)$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

با توجه به این معادله k را می توان با دانستن x و عرض ژئودتیک نقطه مبنا (φ_1) متناظر با y محاسبه نمود.

۶-۷- ضریب اشل بر حسب مختصات نقشه

غالباً فرمولی که ضریب اشل را بر حسب مختصات نقشه بدست دهد در محاسبات عامل بسیار کمک کننده ای خواهد بود. در فصل دوم این بخش که به محاسبات بر روی صفحه نقشه متشابه اختصاص یافته ، اهمیت این معادله را شاهد خواهیم بود. با استفاده از معادله ۶-۳۵ عکس ضریب اشل را می توان بصورت:

$$\frac{1}{k} = \frac{(N \cos \varphi \frac{\partial \lambda}{\partial x})}{(1 + \tan^2 \gamma)^{\frac{1}{2}}} \quad (6-75)$$

نوشت. پس از محاسبه مشتق جزئی $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$ از معادله ۶-۵۷ و بسط دادن $N \cos \varphi$ با یک سری تیلور با نقطه بسط φ_1 (عرض ژئودتیک نقطه مبنا) معادله عکس ضریب اشل بصورت :

$$\frac{1}{k} = 1 - \frac{1 + \eta_1^2}{2} \left(\frac{x}{N_1}\right)^2 + \frac{5 + 5\eta_1^2 - 3\eta_1^4 - 4\eta_1^6 - 24t_1^2\eta_1^4 - 24t_1^2\eta_1^6}{720} \left(\frac{x}{N_1}\right)^4 - \frac{61}{720} \left(\frac{x}{N_1}\right)^6 \quad (6-76)$$

بدست می آید که پس از معکوس نمودن دو طرف معادله فوق خواهیم داشت:

$$k = 1 + \frac{1 + \eta_1^2}{2} \left(\frac{x}{N_1}\right)^2 + \frac{1 + 6\eta_1^2 + 9\eta_1^4 + 4\eta_1^6 - 24t_1^2\eta_1^4 - 24t_1^2\eta_1^6}{720} \left(\frac{x}{N_1}\right)^4 + \frac{1}{720} \left(\frac{x}{N_1}\right)^6 \quad (6-77)$$

۶-۸- سیستم ترانسورس مرکاتور جهانی (Universal Transverse Mercator)

نتایج ریاضی این سیستم تصویر که بصورت اختصار با UTM نشان داده می شود کاملاً بر اساس ریاضی سیستم تصویر ترانسورس مرکاتور استوار است. در این قسمت مشخصات خاص UTM و معادلات لازم برای حل مسائل مستقیم و معکوس در این سیستم ارائه می شوند.

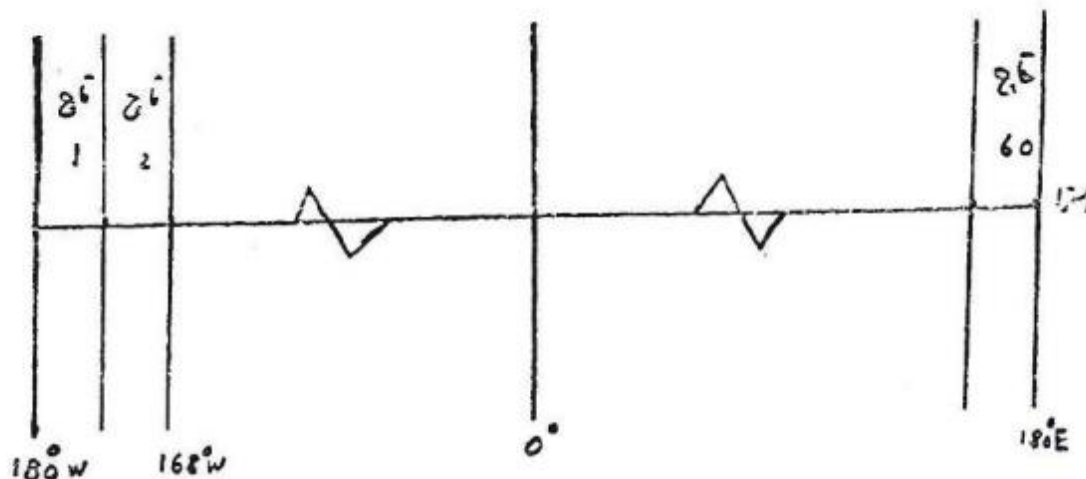
مشخصات UTM عبارتند از:

- ۱- سیستمی است ترانسورس مرکاتور در قاج 6° های 6° درجه
- ۲- بیضوی مقایسه در منطقه ایران - بیضوی بین المللی
- ۳- مبدأ طول ژئودتیک - نصف النهار مرکزی
- ۴- مبدأ عرض ژئودتیک - استوا
- ۵- واحد - متر
- ۶- Y قراردادی برای مبدأ - صفر متر برای نیمکره شمالی و $10,000,000$ متر برای نیمکره جنوبی
- ۷- X قراردادی برای مبدأ - $500,000$ متر
- ۸- ضریب اشل در نصف النهار مرکزی 0.9996

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

- ۹- شماره گذاری قاچ ها - قاچ شماره ۱ بین نصف النهارات ۱۸۰ درجه غربی و ۱۷۴ درجه غربی و تا قاچ شماره ۶۰ که بین نصف النهارات ۱۷۴ درجه شرقی و ۱۸۰ درجه شرقی ادامه دارد (شکل ۶-۷)
- ۱۰- محدوده عرض ژئودتیک برای این سیستم ۸۰ درجه شمالی و ۸۰ درجه جنوبی است.



شکل ۶-۷ (قاچ های UTM)

۱-۸-۶- ضریب اشل در UTM

بطوریکه در معادله ۳۷-۶ دیدیم ضریب اشل را در تصویر ترانسورس مرکاتور بطور تقریب می توانیم با معادله :

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi \quad (6-78)$$

تعیین نماییم.

البته در سیستم ترانسورس مرکاتور، ضریب اشل در طول نصف النهار مرکزی برابر است با یک ، ولی در سیستم UTM این کمیت ۰/۹۹۹۶ است که چنانچه آن را با k_1 نشان دهیم فرمول ضریب اشل را در این سیستم تصویر بصورت:

$$k = k_0 \left[1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi \right] \quad (6-79)$$

خواهیم داشت. بطوریکه مشاهده می شود بر روی نصف النهار مرکزی داریم:

$$k = k_0 \quad (6-79a)$$

زیرا برای نقاط واقع بر آن $\lambda = 0$ (۶-۷۹b) می باشد و هرچه فاصله نقطه از نصف النهار مرکزی بیشتر شود مقدار k نیز فزونی خواهد یافت و به تدریج به عدد یک رسیده و از آن بزرگتر می شود. حال می خواهیم بدانیم در طول چه خط یا خطوطی ضریب اشل برابر با یک خواهد بود. چنانچه در معادله ۷۹-۶ اختلاف k, k_0 را با Δk نشان دهیم خواهیم داشت:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$\lambda^0 = \rho^0 \frac{\sqrt{2}}{\cos \varphi} \left[\frac{\Delta k}{k_0} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۶-۸۰)$$

و با توجه به فرض فوق می توانیم بنویسیم:

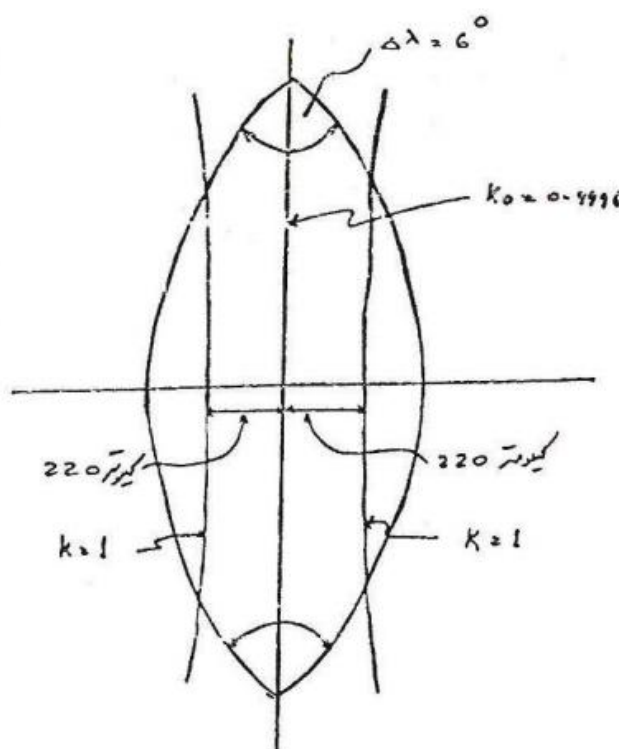
$$\Delta k = 1 - 0.9996 = \frac{1}{2500} = 4 \times 10^{-4}$$

و همچنین:

$$\varphi = 0^\circ, \lambda = 2^\circ$$

$$\varphi = 40^\circ, \lambda = 3^\circ$$

بنابراین در طول استوا در فاصله حدود ۲۲۰,۰۰۰ متر ضریب اشل مساوی واحد خواهد بود (شکل ۶-۸).



شکل ۶-۸ (ضریب اشل در UTM)

۶-۸-۲- معادلات تصویر برای UTM

با مروری بر معادلات ترانسورس مرکاتور مشاهده خواهیم نمود که برای صادق بودن این معادلات در سیستم UTM لازم است مقدار $k = 0.9996$ را برای نصف النهار کروی در تمام فرمول ها اعمال نموده و در نظر داشت. ابتدا فاصله نصف النهاری در

UTM بصورت :

$$y = k_0 s_\varphi = k_0 \int_0^\varphi M d\varphi = k_0 \int_0^\varphi N \cos \varphi d\varphi = k_0 f(\gamma)$$

تنظیم و تنظیم:

حمید جعفرزاده (۶-۸۱)

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

تعریف می شود. می بینیم که در این تابع $f(q)$ در k_0 ضرب می شود و به همین ترتیب تمام مشتقات همین نسبت تغییر می یابند یعنی:

$$k_0 = \frac{d^n f(\gamma)}{d\gamma^n} \quad (6-82)$$

بنابراین معادلات تصویر برای مسئله مستقیم در UTM بر حسب معادلات ترانسورس مرکاتور عبارت است از:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{UTM} = k_0 \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{TM} \quad (6-83)$$

$$k_0 \gamma = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \quad (6-84)$$

تقارب نصف النهارات برای UTM با سیستم ترانسورس مرکاتور یکسان است. زیرا در معادله (6-84) ضریب γ حذف می شود. بنابراین:

$$\gamma_{UTM} = \gamma_{TM} \quad (6-85)$$

ضریب اشل در UTM چنین خواهد بود:

$$k_{UTM} = k_0 \cdot k_{TM} \quad (6-86)$$

در مورد مسئله معکوس، در واقع می خواهیم معادلات ترانسورس مرکاتور را با مختصات UTM بکار ببریم. این بدان معناست که $x_{TM} = \frac{x_{UTM}}{k_0}$ ، بنابراین دو عبارت مربوط به λ را می باید چنین بنویسیم:

$$\lambda = \frac{x_{UTM}}{k_0} \gamma_1^1 - \frac{x_{UTM}^3}{3!k_0^3} \gamma_1^3 - \frac{x_{UTM}^5}{5!k_0^5} \gamma_1^5 + \dots \quad (6-87)$$

به همین ترتیب می توان معادله مربوط به عرض ژئودتیک را نیز بدست آورد. برای محاسبه مسائل مستقیم و معکوس جدولی تهیه شده که در محاسبات از آنها استفاده می نمایند.

(7) تصویر متشابه مخروطی لامبرت^{۶۴}

این سیستم تصویر همزمان با سیستم تصویر ترانسورس مرکاتور در سال ۱۷۷۲ بوسیله لامبرت اختراع شد و مختصراً بصورت LCC معرفی می گردد. خصوصیات این سیستم عبارتند از:

۱- مدارات بصورت قسمت هایی از دوائر متحدالمرکز تصویر می شوند

۲- نصف النهارات به شکل شعاع های این دوائر در صفحه تصویر ظاهر می شوند

در این قسمت به ترتیب مسئله مستقیم، ضریب اشل، تقارب نصف النهارات، حالات یک و دو مدار استاندارد و مسئله معکوس مطرح شده و مورد تجزیه و تحلیل قرار می گیرند.

نقشه و تنظیم:

Lambert Conformal Conic Projection

حمید جعفرزاده
دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

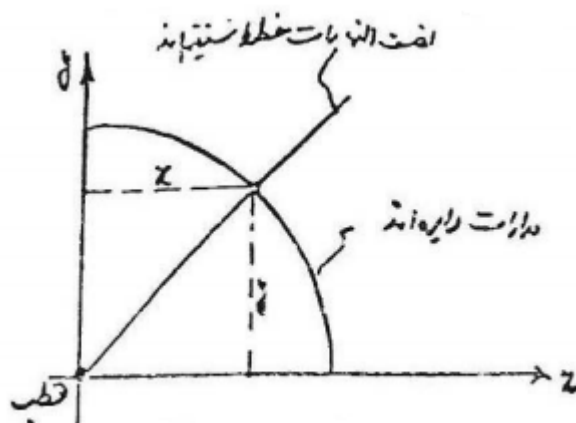
مانند حالات قبل مسئله مستقیم را می توان بعنوان مسئله تعیین تابع f در معادله تصویر زیر تعریف نمود:

$$x + iy = f(\lambda + i\gamma)$$

برای تعیین f باید خصوصیات و شرایط ۱ و ۲ بالا را در نظر گرفت. به این ترتیب f به دو تابع f_1, f_2 تبدیل و تجزیه می شود که این دو تابع را می توان به کمک شروط کوشی و ریمن تعیین نمود. بیان ریاضی شرط ۱ عبارت :

$$x^2 + y^2 = k^2 f_1(\gamma) \quad (7-1)$$

است که در آن k عددی ثابت برای شعاع دایره و مقدار آن بایستی تعیین شود و $f_1(\gamma)$ تابعی است از عرض ایزومتریک (γ) . همچنین x, y مختصات نقشه نسبت به سیستم مختصاتی است که در شکل ۷-۱ نشان داده شده است.



شکل ۷-۱ (مدارات و نصف النهارات بر روی LCC)

دومین شرط یعنی معادله خط راستی که مبین تصویر یک نصف النهار بر روی صفحه تصویر باشد بصورت :

$$y = f_2(\lambda)x + 0 \quad (7-2)$$

است که در آن $f_2(\lambda)$ دومین تابع خواهد بود. با قرار دادن ۷-۲ در ۷-۱ چنین خواهیم داشت:

$$x^2 + f_2^2(\lambda)x^2 = k^2 f_1(\gamma)$$

از این بسط، معادلات پارامتریک زیر را می توان نوشت:

$$x = x(\lambda, \gamma)$$

$$x = \frac{k [f_1(\gamma)]^{\frac{1}{2}}}{[1 + f_2^2(\lambda)]^{\frac{1}{2}}} \quad (7-3)$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$y = y(\lambda, \gamma)$$

$$y = \frac{k f_2(\lambda) [f_1(\gamma)]^{\frac{1}{2}}}{[1 + f_2^2(\lambda)]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{و (۷-۴)}$$

اکنون معادلات کوشی و ریمان را برای تعیین $f_2(\lambda), f_1(\gamma)$ مورد استفاده قرار می دهیم. یادآوری می شود که این معادلات بصورت :

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} = -\frac{\partial y}{\partial \lambda}; \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial y}{\partial \gamma} \quad (۷-۵)$$

می باشند. با توجه به روابط ۷-۴ و ۷-۳ داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} = \frac{k f_1'}{2(f_1)^{\frac{1}{2}}(1 + f_2^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (۷-۶)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{-k (f_1')^{\frac{1}{2}} f_2'}{(1 + f_2^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (۷-۷)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \frac{k f_2 f_1'}{(f_1)^{\frac{1}{2}}(1 + f_2^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (۷-۸)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{k (f_1')^{\frac{1}{2}} f_2'}{(1 + f_2^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (۷-۹)$$

از اولین معادله کوشی و ریمان می توان چنین نتیجه گرفت:

$$-\frac{f_1'}{f_1} = \frac{2f_2'}{1 + f_2^2} = 2L \quad (۷-۱۰)$$

که L ثابت جدیدی است که می باید تعیین شود. بنابراین از معادله ۷-۱۰ می توان دو معادله زیر را نوشت:

$$\frac{f_1'}{f_1} = -2L \quad (۷-۱۱)$$

$$\frac{f_2'}{1 + f_2^2} = L \quad (۷-۱۲)$$

بعداً خواهیم دید که ثابت L جهت از عرض ژئودتیک (φ) ؟؟ از دومین معادله شروط کوشی و ریمان معادلات زیر را می توان

بدست آوردنیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$\frac{f_2'}{1+f_2^2} = \frac{1}{2} \frac{f_1'}{f_1} = -L \quad (7-13)$$

که L همان ثابت قبلی است. از این معادله نیز دو معادله زیر نتیجه می شوند:

$$\frac{f_1'}{f_1} = -2L \quad (7-14)$$

$$\frac{f_2'}{1+f_2^2} = L \quad (7-15)$$

تا این مرحله دو معادله که با استفاده از آن ها قادر خواهیم بود که عباراتی را برای بیان $f_2(\lambda), f_1(\gamma)$ بر حسب مقادیر ثابت k, L محاسبه کنیم، تعیین کرده ایم. برای دستیابی به نتیجه نهایی معادلات دیفرانسیل بالا می بایست انتگرال گرفته شود یعنی:

$$\frac{df_1}{f_1} = -2L d\gamma \quad (7-16)$$

$$\int \frac{df_1}{f_1} = -2L \int d\gamma \quad (7-17)$$

$$Ln(f_1) + C_2 = -2L\gamma + C_1 \quad (7-18)$$

$$Ln(f_1) = -2L\gamma + C_I \quad \text{و یا (7-19)}$$

که C_I ترکیب C_1, C_2 است و با در نظر داشتن شرط (7-20) $Ln(f_1) = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ خواهیم داشت:

$$C_I = 0 \quad (7-21)$$

بنابراین معادله 7-19 بصورت زیر می شود:

$$Ln(f_1) = -2L\gamma \quad (7-22)$$

$$f_1 = e^{-2L\gamma} \quad (7-23)$$

همچنین دومین تابع یعنی $f_2(\lambda)$ را می توان با انتگرال معادله 7-15 تعیین نمود. یعنی:

$$\int \frac{f_2'}{1+f_2^2} df_2 = \int L d\lambda \quad (7-24)$$

$$\tan^{-1} f_2 = L\lambda \quad \text{و یا (7-25)}$$

$$f_2 = \tan(L\lambda) \quad (7-26)$$

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

با قرار دادن f_2, f_1 بدست آمده در معادلات ۴۰۷ و ۷-۳ چنین نتیجه می شود:

$$x = \frac{k [e^{-2L\gamma}]^{\frac{1}{2}}}{[1 + \tan^2(L\lambda)]^{\frac{1}{2}}} \quad (7-27)$$

$$x = ke^{-L\gamma} \cos(L\lambda) \quad (7-28)$$

$$y = ke^{-L\gamma} \sin(L\lambda) \quad (7-29)$$

از معادلات تصویر فوق می توان شعاع هر مداری را با استفاده از :

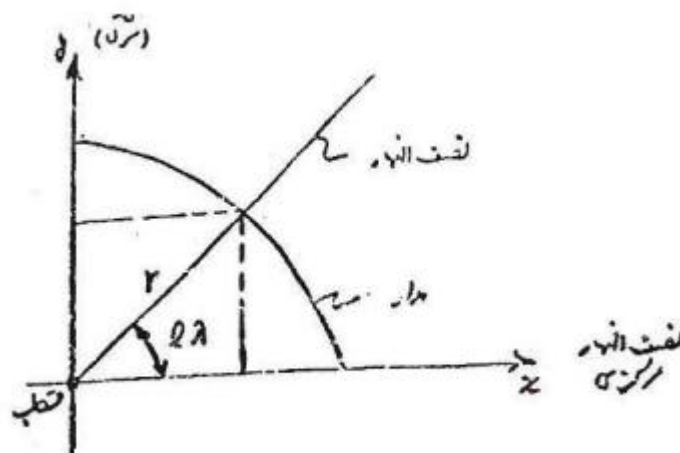
$$r^2 = x^2 + y^2 = k^2 e^{-2L\gamma} (\cos^2(L\lambda) + \sin^2(L\lambda)), \quad (3-30)$$

$$r = ke^{-L\gamma}$$

محاسبه نمود. اکنون می توان معادلات تصویر را بصورت زیر بنویسیم (شکل ۷-۲):

$$x = r \cos(L\lambda) \quad (7-31)$$

$$y = r \sin(L\lambda) \quad (7-32)$$



شکل ۷-۲ مختصات قطبی برای LCC

تابع کلی تصویر یعنی f با ترکیب معادلات ۷-۲۹ و ۷-۲۸ بصورت زیر تعیین می شود:

$$x + iy = f(\lambda + i\gamma) = ke^{-L\gamma} (\cos \lambda + i \sin \lambda) \quad (7-33)$$

و با استفاده از معادله اولر که در قسمت دوم این بخش دیدیم چنین خواهیم داشت:

$$x + iy = ke^{-L\gamma} e^{iL\lambda}$$

$$x + iy = ke^{L(-\gamma + i\lambda)}$$

$$x + iy = ke^{iL(\lambda + i\gamma)}$$

(۷-۳۴) تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

عبارت عمومی ضریب اشل را بصورت :

$$k = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2}}{N \cos \varphi} \quad (7-35)$$

داشتیم. برای LCC ، اجزاء تشکیل دهنده k را می توان به ترتیب زیر تعیین نمود:

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} = -kLe^{-L\gamma} \cos(L\lambda) \quad (7-36)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \gamma} = -kLe^{-L\gamma} \sin(L\lambda) \quad (7-37)$$

$$k = \frac{kLe^{-L\gamma}}{N \cos \varphi} \quad \text{و} \quad (7-38)$$

هر گاه ثابت ها در دست باشند می توان در هر نقطه تصویر، ضریب اشل را به اجزاء مختصات ژئودتیک آن نقطه تعیین نمود.

قبلا دیدیم که معادله عمومی تقارب نصف النهارات بصورت زیر است:

$$\tan \gamma = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} \quad (7-39)$$

در مورد LCC چنین داریم:

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = Lr \sin(Lr) \quad (7-40)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = Lr \cos(Lr) \quad (7-41)$$

بنابراین: $\tan \gamma = \tan(L\lambda)$ و در نتیجه:

$$\gamma = L\lambda \quad (7-42)$$

در این قسمت معادلات تصویر را برای LCC در حالت دو مدار استاندارد تعمیم می دهیم. اگر فرض کنیم که ضریب اشل در طول دو مدار مشخص یک باشد می توانیم با استفاده از معادله ۷-۳۸ چنین بنویسیم:

حمید جعفرزاده
دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$\frac{kLe^{-L\gamma_1}}{N_1 \cos \varphi_1} = \frac{kLe^{-L\gamma_2}}{N_2 \cos \varphi_2} = 1 \quad (7-43)$$

$$\frac{e^{-L\gamma_1}}{e^{-L\gamma_2}} = \frac{N_1 \cos \varphi_1}{N_2 \cos \varphi_2} \quad (7-44)$$

در این معادلات اندیس های ۱ و ۲ نشان دهنده دو مدار مورد بحث هستند. معادله ۷-۴۴ را می توان بصورت :

$$-L\gamma_1 + L\gamma_2 = \ln(N_1) + \ln(\cos \varphi_1) - \ln(N_2) - \ln(\cos \varphi_2) \quad (7-45)$$

نوشت که ثابت L را به شرح زیر تعیین می نماید:

$$L = \frac{\ln(N_1) - \ln(N_2) + \ln(\cos \varphi_1) - \ln(\cos \varphi_2)}{\gamma_2 - \gamma_1} \quad (7-46)$$

با استفاده از معادله ۷-۴۳ ثابت k را می توان بدست آورد:

$$k = \frac{N_1 \cos \varphi_1}{Le^{-L\gamma_1}} = \frac{N_2 \cos \varphi_2}{Le^{-L\gamma_2}} \quad (7-47)$$

با تعیین دو مقدار ثابت L, k به شرحی که در فوق گذشت بحث مربوط به مسئله مستقیم کامل می شود. یادآوری می شود که معادله اصلی تصویر بطوریکه در ۷-۳۵ دیدیم بصورت زیر می باشد:

$$x + iy = ke^{iL(\lambda + i\gamma)}$$

۷-۵ LCC در حالت یک مدار استاندارد

حالت یک مدار استاندارد LCC با این مفهوم است که ضریب اشل در طول آن مدار یک باشد. بنابراین چنانکه عرض ژئودتیک آن مدار را φ_0 فرض کنیم چنین خواهیم داشت:

$$k = 1 = \frac{kLe^{-L\gamma_0}}{N_0 \cos \varphi_0} \quad (7-48)$$

$$N_0 \cos \varphi_0 = Lke^{-L\gamma_0} \quad \text{و یا (7-49)}$$

ولی بطوریکه در معادله ۷-۳۰ دیدیم شعاع هر مدار را می توان با $(7-50) \quad r = ke^{-L\gamma}$ حساب کرد. بنابراین عبارتی که شعاع مدار با فرض φ_0 را بدست می دهد بصورت :

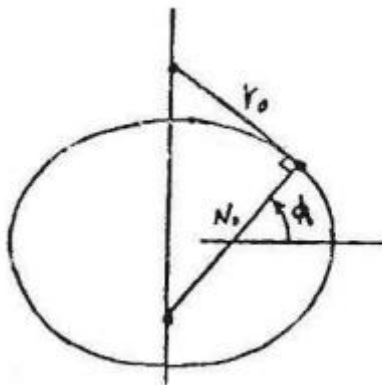
$$r_0 = ke^{-L\gamma_0} \quad (7-51)$$

خواهد بود و معادله ۷-۴۹ را به این ترتیب می توان به رابطه زیر تبدیل نمود:

$$N_0 \cos \varphi_0 = Lr_0 \quad (7-52)$$

که می توان آن را به شکل زیر از نظر هندسی تفسیر نمود (شکل ۷-۳):

تهیه و تنظیم:
حمید جعفرزاده
دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز



شکل ۷-۳

صورت دیگر شعاع استاندارد عبارت است از:

$$r_0 = N_0 \cot \varphi_0 \quad (7-53)$$

عدد ثابت L را می توان با قرار دادن معادله ۷-۵۳ در ۷-۵۲ بدست آورد:

$$N_0 \cos \varphi_0 = L N_0 \cot \varphi_0$$

$$L = \sin \varphi_0 \quad (7-54)$$

و عبارتی که عدد ثابت k را بدست می دهد بصورت زیر خواهد بود (به معادله ۷-۳۰ رجوع شود).

$$k = N_0 \cot \varphi_0 e^{\gamma_0 \sin \varphi_0} \quad (7-55)$$

دو معادله اخیر همراه با معادله تصویر یعنی $x + iy = k e^{iL(\lambda + i\gamma)}$ حل مسئله مستقیم را برای LCC در حالت یک مدار استاندارد را ممکن می سازند.

۷-۶- ترمیم و تغییر سیستم مختصات

سیستم مختصاتی که در شکل ۷-۲ نشان داده شد در عمل چندان مناسب نیست. برای رفع اشکال، دو ترمیم یا تغییر بدین شرح انجام می دهیم: محورهای x و y را به یکدیگر تبدیل می کنیم و محل مبدأ را به منظور تقلیل اندازه یکی از مختصات تغییر می دهیم. از معادلات ۷-۳۲ و ۷-۳۱ چنین داشتیم:

$$x = r \cos(L\lambda)$$

$$y = r \sin(L\lambda)$$

که پس از تبدیل x به y و بالعکس نتیجه می گیریم:

$$x = r \sin(L\lambda)$$

$$y = r \cos(L\lambda)$$

(۷-۵۶)

تهیه و تنظیم:

حمید جعفرزاده

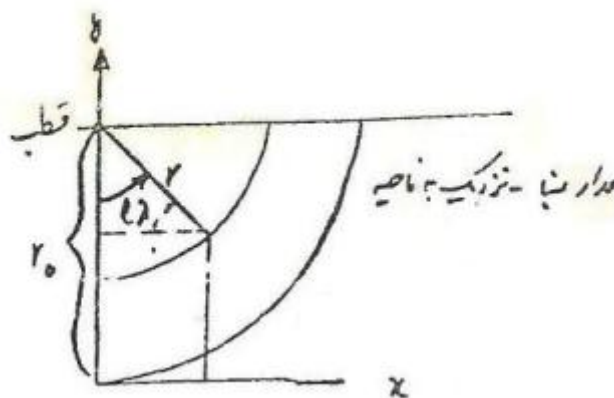
دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

معادلاتی که مبین تغییر مبدأ هستند عبارتند از (به شکل ۷-۴ رجوع شود):

$$\begin{aligned} x &= r \sin(L \lambda) \\ y &= r_0 - r \cos(L \lambda) \end{aligned} \quad (7-57)$$

که r_0 طوری انتخاب می شود که بزرگتر از عبارت قسمت دوم باشد و منظور از این کار، خودداری از داشتن مقدار منفی برای y است. دو طریق که با استفاده از آن ها می توان r_0 را با این شرط انتخاب نمود وجود دارد. یکی انتخاب φ_0 است به نحوی که آن زیر ناحیه مورد نظر واقع باشد و با استفاده از این φ_0 ، عبارت (۷-۵۸) $r_0 = k e^{-L \gamma_0}$ را حساب نمود و یا مستقیماً عبارت زیر را می توان بدست آورد:

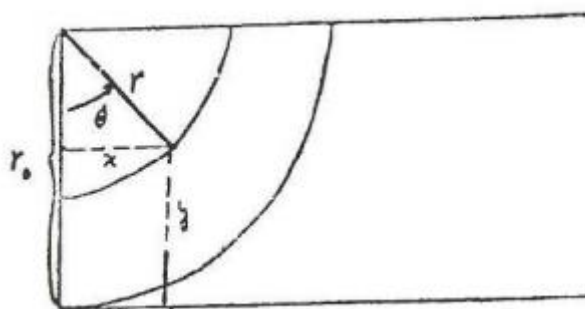
$$r_0 = N_0 \cot \varphi_0 \quad (7-59)$$



شکل ۷-۴ (تبدیل مبدأ مختصات در LCC)

۷-۷- مسئله معکوس

در مسئله معکوس مقادیر x, y همراه با r_0, L, k داده می شوند و مختصات ژئودتیک یعنی φ, λ مطلوب مسئله هستند.



شکل ۷-۵ (مسئله معکوس)

از شکل ۷-۵ می توان عبارت زیر را برای طول ژئودتیک نوشت:

$$\tan \theta = \frac{x}{r_0 - y}$$

تهیه و تنظیم:
(۶-۶۰) حمید جعفرزاده

دانشجوی مهندسی ژئوماتیک دانشگاه تبریز

$$\theta = L \lambda$$

و (۷-۶۱)

بنابراین داریم:

$$\lambda = \frac{\theta}{L}$$

(۷-۶۲)

عرض ژئودتیک با اجرای مراحل زیر بدست می آید. ابتدا r از معادله (۷-۶۳) $r = \frac{r_0 - y}{\cos \theta}$ حساب می شود. می دانیم که :

$$r = ke^{-L\gamma}$$

بنابراین :

$$\ln(r) = \ln(k) - L\gamma$$

(۷-۶۴)

$$\gamma = \frac{\ln(k) - \ln(r)}{L}$$

و یا (۷-۵۶)

پس از تعیین γ می توان φ را با استفاده از روش تکراری *newton-Raphson* که قبلا شرح داده شد تعیین نمود.