بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تفرش

گروه مهندسی نقشه برداری

ژئودزی فیزیک

گرد آوری و ترجمه : بهزاد به نبیان

۲. جاذبه[1] و ثقل[2]

۲. ۱. جاذبه نیوتونی

نیوتون نیروی جاذبه بین اجرام را کشف کرد او با انجام دو مشاهده اساسی (نجومی) به این دیدگاه رسید:

۱- نیروی جاذبه بین دوجسم متناسب با جرم آنهاست.

۲- این نیرو متناسب با عکس مجذور فاصله بین آن دو می باشد.

به زبان ریاضیات قانون نیوتن اینگونه بیان می شود: (۲-۱) $F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$ نیوتن این رابطه را توصیف ریاضی جاذبه نامید به عبارت دیگر این رابطه تشریح کننده ماهیت فیزیکی طبیعت جاذبه نیست. ضریب تناسب در این رابطه (G) ثابت جهانی جاذبه است : $G = 6.672\times10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1} (Nm^2 kg^{-2})$

بر اساس قانون نیوتن در اطراف هر جسم دارای جرم می توان یک میدان نیروی جاذبه تعریف نمود. میدان نیرو یک فضای کارتزین سه بعدی است بطوریکه به هر نقطه از آن بتوان یک بردار نیرو نسبت داد که اندازه، جهت و راستای این بردار تابعی از مختصات آن نقطه می باشد. بزرگی یک میدان نیرو را با شدت آن بیان می کنند، در مورد رابطه (۲-۱) اندازه شدت میدان جاذبه جرمی را برای جرم m_1 به صورت ذیل بدست می آوریم : $a_{12} = \frac{F_{12}}{m_2} = G\frac{m_1}{r_{12}^2}$ ودر حالت کلی $(m_1 = m)$: (۲-۲) $a_{12} = G\frac{m}{r_{12}^2}$

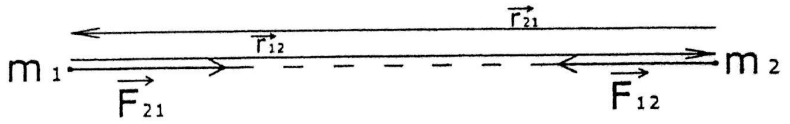
به عبارت دیگر در اطراف هر جسمی به جرم m_1 یک میدان نیروی جاذبه وجود دارد که اگر جسمی به جرم m_2 وارد آن بشود نیروئی به اندازه $F = a_{12} m_2$ به آن وارد خواهد شد. شدت میدان جاذبه جرمی کمیتی از جنس شتاب است و به همین دلیل به آن شتاب جاذبه گفته می شود و واحد آن m/s^2 می باشد. در ژئودزی به جای m/s^2 از واحدی بنام گال (Gal) استفاده می شود (به افتخار گالیله) :

$$1\text{Gal} = 10^{-2}\,\text{m/s}^2 = 1\text{cm/s}^2$$
$$1\text{mGal} = 10^{-5}\,\text{m/s}^2 \qquad (۳-۲)$$
$$1\mu\text{Gal} = 10^{-8}\,\text{m/s}^2$$

از آنجائی که میدان نیرو دارای تعریفی ذاتا برداریست بنابراین برای توصیف دقیق و صحیح آن باید شکل برداری آنرا بیان کنیم. نیروی جاذبه گرانشی[3] در راستای امتداد متصل کننده دو جرم نقطه ای[4] عمل می کند و در یک وضعیت متقارن اندازه و راستای بردار نیروی جاذبه در نقطه 1 (محل قرار گرفتن جرم m_1) مساوی با بردار نیروی جاذبه در نقطه 2 می باشد ولی جهت آن دو مخالف یکدیگر است (شکل ۱-۱): $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$

---

[1] Gravitation
[2] Gravity
[3] Gravitational attraction force
[4] Point mass

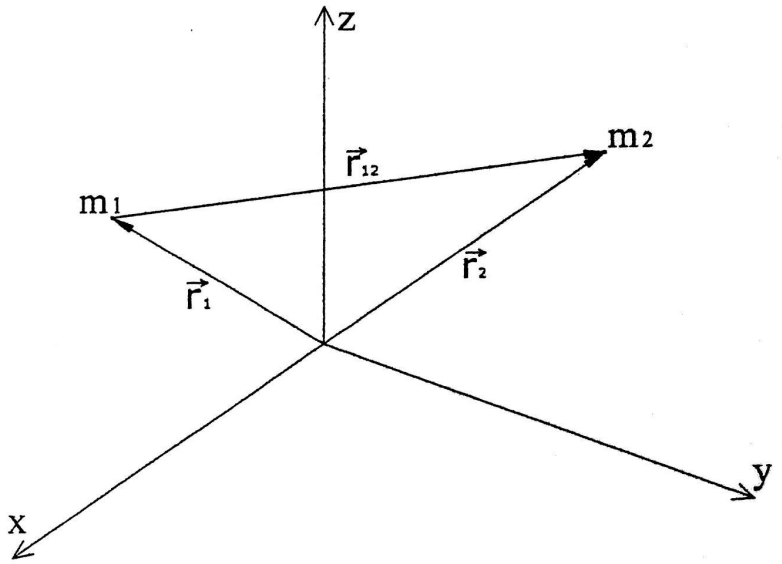


شکل ۱-۱ : تاثیر نیروی جاذبه دو جرم نقطه ای بر یکدیگر

شکل برداری قانون جاذبه عمومی نیوتن به صورت مقابل بیان می گردد : (۲-٤) $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{\mathbf{e}}_{12}$

در این رابطه $\vec{\mathbf{e}}_{12}$ بردار یکه در راستای $\vec{\mathbf{r}}_{12}$ می باشد: $\vec{\mathbf{r}}_{12} = r_{12}\vec{\mathbf{e}}_{12}$ و در نتیجه : $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\dfrac{\vec{\mathbf{r}}_{12}}{r_{12}}$

و نهایتا این رابطه بدست می آید : (۲-۵) $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{\mathbf{r}}_{12} = G\dfrac{m_1 m_2}{r_{21}^3}\vec{\mathbf{r}}_{21}$



شکل ۲-۲ : نمایش برداری جاذبه بین دو جرم در سیستم مختصات کارتزین سه بعدی

در فضای سه بعدی با در نظر گرفتن بردارهای موقعیت $\vec{\mathbf{r}}_1$ و $\vec{\mathbf{r}}_2$ برای جرمهای نقطه ای m_1 و m_2 مطابق شکل (۲-۲)، روابط زیر نتیجه گرفته می شود :

$$\vec{\mathbf{r}}_{12} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \text{ یا : } \vec{\mathbf{r}}_{12} = (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{k}}$$

که در رابطه دوم $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ بردارهای یکه در راستای محورهای مختصات می باشند. با استفاده از این روابط و جایگذاری در رابطه (۲-۵)، فرمول کلی نیروی جاذبه بین دو جرم نقطه ای بدست می آید:

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1\right|^3}\left(\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1\right) \quad (۲-٦)$$

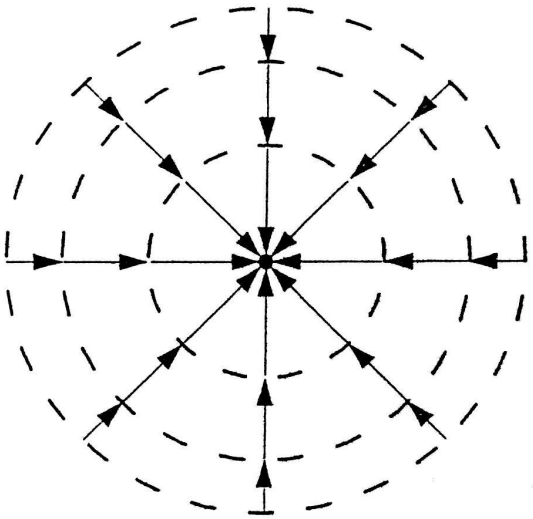
شکل دیگر رابطه (۲-۶) به صورت زیر بیان می شود:

$$\bar{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\right]^{3/2}}\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \\ z_2-z_1 \end{pmatrix} \qquad (۲-۷)$$

۲. ۲. میدان نیروی جاذبه

همانطور که در بخش قبل اشاره شد میدان نیروی جاذبه یک جسم را با شتاب گرانشی آن جسم برآورد می کنند و آن یک کمیت برداری است. در صورتی که جرم را نقطه ای فرض کنیم و مبدا سیستم مختصات را به مرکز جرم منتقل کنیم، با توجه به رابطه (۲-۶) در صورتیکه بردار موقعیت هر نقطه دلخواه در اطراف جرم را با $\bar{r}$ نشان دهیم آنگاه بنابرتعریف میدان نیروی جاذبه از رابطه زیر برآورد می گردد:

$$\bar{a}(\bar{r}) = -G\frac{m}{r^3}\bar{r} \qquad (۲-۸)$$

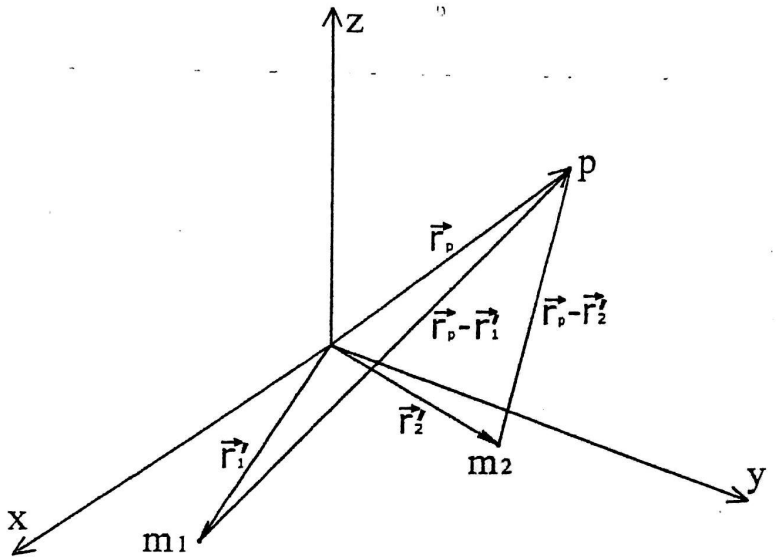


شکل ۲-۳ : میدان نیروی جاذبه متقارن در اطراف یک جرم نقطه ای

در شکل فوق بردارهای شدت میدان بصورت انتخابی در فواصلی معین از جسم نمایش داده شده اند و ملاحظه می شود که با افزایش فاصله از جسم اندازه بردار شتاب جاذبه به شدت کاهش می یابد (زیرا که با مجذور فاصله نسبت معکوس دارد) و همچنین به دلیل نقطه ای فرض کردن جرم میدان جاذبه آن کروی و متقارن است. رابطه (۲-۸) که نشات گرفته از قانون جاذبه عمومی نیوتن است فقط برای جرمهای نقطه ای کفایت می کند. قانون جاذبه عمومی نیوتن بر اساس نتایج تجربی بدست آمده از مشاهدات نجومی تیکوبراهه[5] اختر شناس دانمارکی و قوانین کپلر بدست آمده است و وقتی به درستی جوابگو خواهد بود که فواصل به قدری بزرگ باشد که بتوان جرمها را نقطه ای در نظر گرفت مثلا فواصل سیارات منظومه شمسی از خورشید که در مقایسه با ابعاد آنها چنین فرضی قابل قبول است ولی هرگاه بخواهیم در

[5] Tycho de Brahe

فاصله ای نزدیک از جسمی که ممکن است دارای شکل هندسی منظم یا غیر منظمی باشد و یا توزیع چگالی جرم در نقاط مختلف آن متفاوت باشد میدان نیروی جاذبه را توصیف کنیم رابطه (۲-۸) مناسب نیست. برای بررسی چنین وضعیتی ابتدا میدان نیروی جاذبه ناشی از تعدادی جرم نقطه ای ناپیوسته را بررسی می کنیم. به شکل (۲-٤) توجه کنید قصد داریم بردار شتاب جاذبه ناشی از میدان نیروی حاصل از جرمهای مجزای m_1 و m_2 را در نقطه ای دلخواه از فضای سه بعدی بدست آوریم این نقطه که اصطلاحا نقطه محاسبه[6] گفته می شود را p می نامیم و بردار موقعیت آن $\bar{\mathbf{r}}_p$ است. بردار موقعیت نقاطی را که دارای جرم هستند با $\bar{\mathbf{r}}_1'$ و $\bar{\mathbf{r}}_2'$ نمایش می دهیم.



شکل ۲-٤ : بررسی شتاب جاذبه ناشی از دو جرم نقطه ای مجزا

بردار شتاب جاذبه در نقطه p برابر با جمع برداری شتاب جاذبه ناشی از هریک از آن دو جرم m_1 و m_2 می باشد:

$$\bar{\mathbf{a}}_p = \bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2 = -G\frac{m_1}{\left|\bar{\mathbf{r}}_p - \bar{\mathbf{r}}_1'\right|^3}\left(\bar{\mathbf{r}}_p - \bar{\mathbf{r}}_1'\right) - G\frac{m_2}{\left|\bar{\mathbf{r}}_p - \bar{\mathbf{r}}_2'\right|^3}\left(\bar{\mathbf{r}}_p - \bar{\mathbf{r}}_2'\right) \quad (۲-۹)$$

بنابراین اگر ذره ای به جرم m در نقطه p واقع شود آنگاه نیروی $\bar{\mathbf{F}} = m\bar{\mathbf{a}}_p$ به آن وارد خواهد شد. در حالت کلی تر اگر تعداد n جرم نقطه ای مجزا داشته باشیم، میدان نیروی جاذبه حاصل از آنها از رابطه ذیل محاسبه می گردد:

$$\bar{\mathbf{a}}_p = \bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{r}}_p) = \sum_{i=1}^{n}\bar{\mathbf{a}}_i = -G\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{\left|\bar{\mathbf{r}}_p - \bar{\mathbf{r}}_i'\right|^3}\left(\bar{\mathbf{r}}_p - \bar{\mathbf{r}}_i'\right) \quad (۲-۱۰)$$

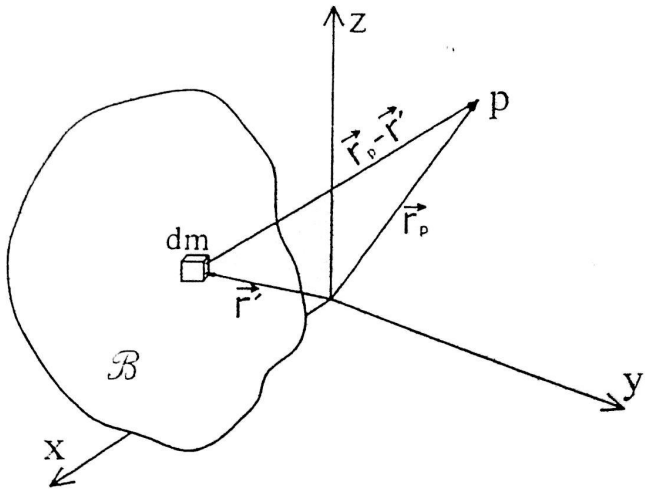
حال اگر یک جسم مانند B را در شکل (۲-۵) نظر بگیریم که متشکل از بینهایت عنصر جرمی نقطه ای است که بینهایت به یکدیگر نزدیک هستند در مقایسه با وضعیت نشان داده شده در رابطه (۲-۱۰) در واقع از یک فضای گسسته به یک فضای پیوسته باید انتقال صورت بگیرد در این حالت وقتی $n \to \infty$ آنگاه $\sum_i \to \iiint_B$ و $m_i \to dm$ می شود.

---

[6] Computation point

جسم B از بینهایت عنصر جرمی مکعبی شکل بینهایت کوچک dm با حجم $d\mathrm{B}$ تشکیل شده است که بردار موقعیت آنها را با $\bar{\mathbf{r}}'$ نشان می دهیم به هریک از این عناصر چگالی ذره ای $\rho(\bar{\mathbf{r}}')$ نسبت داده می شود $dm(\bar{\mathbf{r}}') = \rho(\bar{\mathbf{r}}')d\mathrm{B}$ بنابراین رابطه (۲-۱۰) برای یک جسم پیوسته به صورت زیر ظاهر می گردد:

$$\bar{\mathbf{a}}_p = \bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{r}}_p) = -G\iiint_{\mathrm{B}} \frac{\rho(\bar{\mathbf{r}}')}{|\bar{\mathbf{r}}_p - \bar{\mathbf{r}}'|^3}\left(\bar{\mathbf{r}}_p - \bar{\mathbf{r}}'\right)d\mathrm{B} \qquad (۲-۱۱)$$



شکل ۲-۵ : بررسی شتاب جاذبه ناشی از یک جسم در نقطه ای دلخواه در اطراف آن

از دیدگاه کلی برای هر نقطه دلخواه با بردار موقعیت $\bar{\mathbf{r}}$ در فضای اطراف یک جسم B شتاب جاذبه گرانشی از رابطه مقابل بدست می آید:

$$\boxed{\bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{r}}) = -G\iiint_{\mathrm{B}} \frac{\rho(\bar{\mathbf{r}}')}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|^3}\left(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'\right)d\mathrm{B}} \qquad (۲-۱۲)$$

در رابطه فوق در واقع فضا به دو بخش تقسیم گردیده است : ۱) فضای نقاطی که متعلق به جسم B هستند و می خواهیم اثر جرم آنها را برروی میدان جاذبه تولید شده توسط جسم B در نظر بگیریم که بردار موقعیت این نقاط را با $\bar{\mathbf{r}}'$ نشان داده ایم به این فضا، فضای مولد میدان جاذبه (dummy points) می گوئیم. ۲) فضای نقاط خارج از جسم که قصد داریم شتاب جاذبه را برای نقاط واقع در این فضا بدست بیاوریم و بردار موقعیت این نقاط را با $\bar{\mathbf{r}}$ نشان می دهیم این فضا را فضای محاسبه یا فضای نقاط محاسبه[۷] می نامیم.

۲. ۳. پتانسیل جاذبه

در تعریف میدان نیرو به دلیل ماهیت برداری که دارد به هر نقطه از فضا سه مولفه برداری در جهت محورهای مختصات منتسب می گردد. سوالی که مطرح می گردد اینست که آیا این امکان وجود دارد که این میدان برداری را با یک میدان اسکالر جایگزین کنیم به گونه ای که تمام خصوصیات آن حفظ گردد؟ از دیدگاه فیزیکی می خواهیم بدانیم آیا می توان به جای نسبت دادن بردار نیرو به هر نقطه از فضا انرژی پتانسیل را به آن نقطه منتسب کنیم؟ در چنین

[۷] Computation points

صورتی به جای سه مولفه برداری فقط با یک مولفه اسکالر سروکار خواهیم داشت و انجام محاسبات و نتیجه گیریها بسیار ساده تر خواهد بود. جواب این سوال به ماهیت میدان نیرو بستگی دارد و این امر هنگامی ممکن است که کارانجام شده از یک نقطه به نقطه دیگر به مسیر بستگی نداشته باشد و بنابراین کار بر روی یک منحنی بسته صفرخواهد بود به میدانی که دارای این خصوصیت باشد میدان غیر دورانی (irrotational) گفته می شود و خصوصیتی که برای کلیه میدانهای غیر دورانی صدق می کند آنست که این میدانها مشتق از یک تابع پتانسیل می باشند یعنی همواره تابعی مانند $V(\vec{\mathbf{r}})$ وجود دارد به گونه ای که : $\vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(V(\vec{\mathbf{r}})) = \vec{\nabla} V(\vec{\mathbf{r}})$ واگر در این رابطه زمان را نیز لحاظ کنیم به عبارت دیگر میدان $\vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}})$ مستقل از تغییرات زمان باشد آنگاه به آن میدان نیروی پایستار (conservative) می گویند. برای اثبات پایستار بودن یک میدان همواره باید کرل آن صفر باشد: $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$: در فیزیک ثابت می شود که میدان نیروی جاذبه همواره غیردورانی و در تقریب اول پایستار است. بنابراین می توانیم میدان اسکالر پتانسیل جاذبه را جایگزین میدان نیروی جاذبه کنیم. را بطه بین این دو بصورت ذیل است:

$$\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{grad}(V) = \vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (۱۳-۲)$$

که در رابطه فوق V تابع پتانسیل است. پتانسیل یک جرم نقطه ای که شتاب جاذبه آن $\vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) = -G\dfrac{m}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$ می باشد از این رابطه بدست می آید : (۱۴-۲) $V(\vec{\mathbf{r}}) = G\dfrac{m}{r}$ زیرا که اگر از این تابع گرادیان بگیریم:

$$\vec{\nabla}(V(\vec{\mathbf{r}})) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G\dfrac{m}{r^3}x \\ -G\dfrac{m}{r^3}y \\ -G\dfrac{m}{r^3}z \end{pmatrix} = -G\dfrac{m}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -G\dfrac{m}{r^3}\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) \qquad (۱۵-۲)$$

و همانطور که می دانید: $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$ و $\dfrac{\partial V}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} = -G\dfrac{m}{r^2}\left(\dfrac{2x}{2r}\right) = -G\dfrac{m}{r^3}x$

پتانسیل جاذبه برای یک جسم از رابطه مقابل بدست می آید: (۱۶-۲) $\boxed{V(\vec{\mathbf{r}}) = G\iiint_{\mathrm{B}} \dfrac{\rho(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} d\mathrm{B}}$

رابطه فوق را برحسب مختصات x, y, z به این صورت هم می توان نوشت:

$$V(x, y, z) = G\iiint_{\mathrm{B}} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi d\eta d\zeta}{\left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right)^{1/2}} \qquad (۱۷-۲)$$

در این رابطه (x, y, z) مختصات نقاطی از فضاست که می خواهیم پتانسیل جاذبه را برای آنها تعیین نمائیم و با بردار موقعیت $\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ نشان می دهیم و (ξ, η, ζ) مختصات عناصر مکعبی شکل بینهایت کوچک به ابعاد $d\xi d\eta d\zeta$ و چگالی $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ از فضای متعلق به جسم است که بوجود آورنده میدان نیروی جاذبه هستند و تاکنون آنها را با بردار موقعیت $\vec{\mathbf{r}}' = \xi\,\hat{\mathbf{i}} + \eta\,\hat{\mathbf{j}} + \zeta\,\hat{\mathbf{k}}$ نشان داده ایم . با گرادیان گرفتن از تابع اسکالر فوق در فضای خارج از جسم، شتاب جاذبه مربوط به جسم B بدست خواهد آمد:

$$\bar{\nabla}(V(\bar{r})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = G\iiint_B \rho(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta \begin{pmatrix} \frac{\partial(1/l)}{\partial x} \\ \frac{\partial(1/l)}{\partial y} \\ \frac{\partial(1/l)}{\partial z} \end{pmatrix} = G\iiint_B \rho(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta \begin{pmatrix} \frac{-(x-\xi)}{l^3} \\ \frac{-(y-\eta)}{l^3} \\ \frac{-(z-\zeta)}{l^3} \end{pmatrix}$$

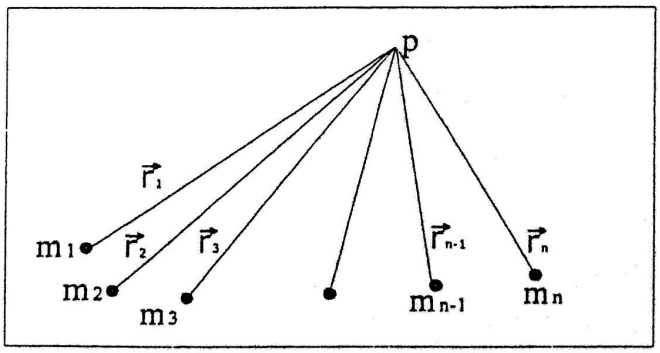
$$= -G\iiint_B \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}(\bar{r}-\bar{r}')dB \quad (۱۸-۲) \qquad l = \left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right)^{1/2}$$

۲. ۴. اصل برهم نهی

اصل برهم نهی به خاصیت جمع پذیری پتانسیل و شدت میدان نیروی جاذبه اشاره دارد و بنابر این اصل اگر پتانسیل جاذبه ناشی از جرم نقطه ای m_i برابر با $V_i = G\frac{m_i}{r_i}$ باشد آنگاه پتانسیل جاذبه مجموعه ای از n جرم نقطه ای برابر با جمع پتانسیل جاذبه تک تک آنها خواهد بود : (۲-۱۹) $V = \sum_{i=1}^{n} V_i = G\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}$

در رابطه فوق r_i فاصله بین جرمهای نقطه ای و نقطه محاسبه است. شدت میدان جاذبه نیز به سادگی با گرادیان گرفتن از رابطه (۲-۱۹) بدست می آید: (۲-۲۰) $\bar{a} = \bar{\nabla}V = \sum_{i=1}^{n}\bar{\nabla}V_i = -G\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i^3}\bar{r}_i$

و این همان رابطه (۲-۱۰) است که درآن به جای نشان دادن بردار موقعیت نقاط متعلق به جسم و تفاضل آن از بردار موقعیت نقطه محاسبه، از $\bar{r}_i$ به عنوان بردار واصل هر یک از جرمهای نقطه ای به نقطه محاسبه استفاده گردیده است (شکل ۲-۶).



شکل ۲-۶ : پتانسیل جاذبه مجموعه ای از جرمهای نقطه ای مجزا

و در حالت پیوسته وقتی که $n \to \infty$ می توان گفت :

$$V_p = G\iiint_B \frac{dm}{r} = G\iiint_B \frac{\rho(x,y,z)}{r}dxdydz \quad (۲۱-۲)$$

و نیز :
$$\bar{\mathbf{a}}_P = \bar{\nabla} V_P = -G\iiint_B \frac{\rho(x,y,z)}{r^3}\bar{\mathbf{r}}\ dxdydz \qquad (۲-۲۲)$$

و همانطور که می دانید روابط فوق روایتهای دیگری از روابط (۲-۱۶) و (۲-۱۲) می باشند.

۲. ۵. محاسبه میدان جاذبه اجسام ایده آل

در این قسمت می خواهیم به کمک روابط بدست آمده میدان جاذبه اجسام ایده آل را محاسبه کنیم. منظور ما از اجسام ایده آل، اجسامی است که دارای یک شکل منظم هندسی باشند و از نظر چگالی نیز همگن باشند. که دراین بخش ابتدا دو جسم را بررسی خواهیم نمود : کره جامد همگن و استوانه همگن توپر که مطالعه هریک از اینها در درک مباحث آینده مفید خواهد بود و سپس میدان جاذبه صفحه ای به ابعاد نامحدود را محاسبه می کنیم که در فصل ٦ دارای کاربرد عملی خواهد بود.

۲. ۵. ۱. میدان جاذبه کره توپر همگن

کره ای به شعاع R که همگن باشد را در نظر بگیرید : $\rho(x,y,z)=\rho$ برای محاسبه انتگرالهای (۲-۲۱) و (۲-۲۲) یک سیستم مختصاتی که مرکز آن در مرکز کره باشد را در نظر می گیریم و از آنجائی که کره از نظر دورانی یک جسم متقارن است فرقی نمی کند که نقطه محاسبه را در کجا فرض کنیم به همین دلیل و برای راحتی در محاسبات بعدی نقطه محاسبه (P) را بر روی جهت مثبت محور Z فرض می کنیم. بردار موقعیت نقطه محاسبه و نقطه Q (نقطه ای متغییر که متعلق به جسم B است و تولید کننده جاذبه محسوب می شود) به صورت ذیل می باشد :

$$\bar{\mathbf{r}}_Q = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\lambda \\ r\sin\theta\sin\lambda \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \mathrm{r_Q} = r < R \qquad \text{و} \qquad \bar{\mathbf{r}}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \mathrm{r_P} = z$$

$$\bar{\mathbf{r}}_{PQ} = \bar{\mathbf{r}}_Q - \bar{\mathbf{r}}_P = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\lambda \\ r\sin\theta\sin\lambda \\ r\cos\theta - z \end{pmatrix}, \quad r_{PQ} = \sqrt{z^2 + r^2 - 2rz\cos\theta} \qquad (۲-۲۳)$$

و مسلما استفاده از سیستم مختصات کروی ساده تر از سیستم کارتزین خواهد بود. کرانه های انتگرال بصورت $\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\lambda=0}^{2\pi}$ خواهد بود و عنصر حجم $dxdydz$ با $r^2\sin\theta\, d\lambda d\theta dr$ جایگزین می شود و بنابر این :

$$V_P = G\rho\iiint \frac{1}{r_{PQ}}dxdydz = G\rho\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\lambda=0}^{2\pi}\frac{1}{r_{PQ}}r^2\sin\theta\, d\lambda d\theta dr \qquad (۲-۲۴)$$

$$\text{حل} = G\rho\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\lambda=0}^{2\pi}\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{z^2+r^2-2rz\cos\theta}}d\lambda d\theta dr = 2\pi G\rho\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{z^2+r^2-2rz\cos\theta}}d\theta dr$$

انتگرال فوق ساده به نظر نمی رسد ولی با یک ترفند ساده براحتی حل می شود و آن استفاده از تغییر متغییر است. r_{PQ} را l می نامیم و آنگاه :

$$\frac{dl}{d\theta} = \frac{d\sqrt{z^2+r^2-2rz\cos\theta}}{d\theta} = \frac{zr\sin\theta}{l} \Rightarrow \frac{l}{zr}dl = \sin\theta d\theta \Rightarrow r^2\sin\theta d\theta = \frac{rl}{z}dl$$

و در نتیجه (۲-۲۵) $V_p = 2\pi G\rho \int_{r=0}^{R}\int_{l=l_-}^{l=l_+} \frac{r}{z}\, dl dr$ و ابتدا حدود انتگرال گیری $\int_l$ باید تعیین گردد که برای این منظور دو حالت قابل تشخیص است. اول آنکه نقطه محاسبه در خارج کره واقع باشد و دوم در نظر گرفتن نقطه محاسبه درون کره است. حالت اول را بررسی می کنیم $(z > R)$، حداقل مقداری که l می تواند اختیار کند مربوط به حالتیست که $\theta = 0$ می باشد و حداکثر آن در $\theta = \pi$ اتفاق می افتد :

$$\theta = 0 \Rightarrow l_- = z - r$$
$$\theta = \pi \Rightarrow l_+ = z + r \qquad (۲۶-۲)$$

و رابطه (۲-۲۵) بدین صورت خواهد شد: $V_p = 2\pi G\rho \int_{r=0}^{R}\int_{l=z-r}^{l=z+r} \frac{r}{z}\, dl dr = 2\pi G\rho \int_{r=0}^{R} \left[\frac{r}{z} l\right]_{z-r}^{z+r} dr$

و با جایگذاری حدود انتگرال : $V_p = 2\pi G\rho \int_{r=0}^{R} \frac{2r^2}{z} dr = \frac{4}{3}\pi G\rho \frac{R^3}{z}$ (۲-۲۶)

ما بطور اختیاری نقطه محاسبه P را روی محور z فرض نموده ایم و همانطور که می دانید در حالت کلی می توان z را با r جایگزین نمود: $V_p = \frac{4}{3}\pi G\rho R^3 \frac{1}{r}$ (۲-۲۷)

نتیجه جالبی بدست می آید زیرا $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ برابر جرم کره یعنی M می باشد و رابطه مربوط به محاسبه پتانسیل جاذبه یک کره همگن از نقطه P که به فاصله r از مرکز کره قرار گرفته است با همان رابطه ساده مربوط به پتانسیل جرم نقطه ای یکی خواهد بود: $V = \frac{GM}{r}$ (۲-۲۸)

مسئله شماره ۱- مطلوبست محاسبه جرم زمین (M_E) و چگالی متوسط آن (ρ_E) در حالیکه زمین را کره ای ایده آل با شتاب جاذبه $a = 981Gal$ در سطح و شعاع $R = 6378km$ در نظر بگیریم.

در حالتیکه **نقطه محاسبه درون کره** فرض کنیم باید بین پتانسیل جاذبه دو قسمت تمایز قائل شویم : پتانسیل جاذبه بخشی از کره که زیر نقطه P قرار دارد و پتانسیل جاذبه بخشی از آن که بالای نقطه P قرار می گیرد وبنابر اصل برهم نهی برابر با مجموع پتانسیلهای جاذبه این دو بخش خواهد شد. پتانسیل جاذبه بخشی که زیر نقطه P به مختصات $[0,0,z]$ قرار می گیرد از رابطه (۲-۲۷) محاسبه می گردد :

$$V_p = \frac{4}{3}\pi G\rho \frac{z^3}{z} = \frac{4}{3}\pi G\rho z^2 \qquad (۲-۲۹)$$

و برای محاسبه پتانسیل جاذبه بخش بالائی حدود انتگرال (۲-۲۵) به صورت ذیل است :

$$\theta = 0 \Rightarrow l_- = r - z$$
$$\theta = \pi \Rightarrow l_+ = r + z \qquad (۲-۳۰)$$

حدود انتگرال برای متغیر r از z تا R خواهد بود: $V_p = 2\pi G\rho \int_{r=z}^{R}\int_{l=r-z}^{l=r+z} \frac{r}{z}\, dl dr = 2\pi G\rho \int_{r=z}^{R} \left[\frac{r}{z} l\right]_{r-z}^{r+z} dr$

$$= 2\pi G\rho \int_{r=z}^{R} 2r dr = 2\pi G\rho \left[r^2\right]_z^R = 2\pi G\rho (R^2 - z^2) \qquad (۲-۳۱)$$

و پتانسیل حاصل از تلفیق پتانسیلهای کره کوچکتر $(r < z)$ و پوسته کروی $(z < r < R)$ از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$V_P = \frac{4}{3}\pi G\rho z^2 + 2\pi G\rho(R^2 - z^2) = 2\pi G\rho(R^2 - \frac{1}{3}z^2) \qquad (۳۲-۲)$$

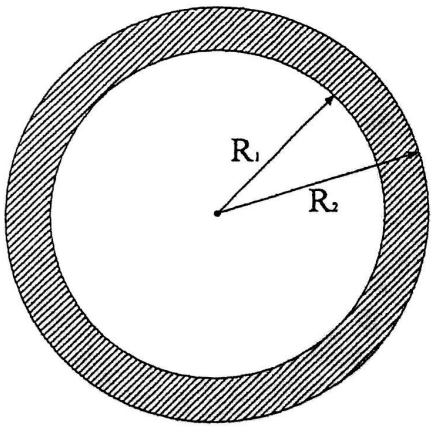
مجددا می توانیم z را با r جایگزین کنیم. بطور خلاصه پتانسیل جاذبه یک کره همگن به شعاع R از رابطه مقابل بدست می آید:

$$\boxed{\begin{aligned} V(r > R) &= \frac{4}{3}\pi G\rho R^3 \frac{1}{r} \\ V(r = R) &= \frac{4}{3}\pi G\rho R^2 \\ V(r < R) &= 2\pi G\rho(R^2 - \frac{1}{3}r^2) \end{aligned}} \qquad (۳۳-۲)$$

و اعمال گرادیان بر فرمول (۲-۳۳) شتاب جاذبه را نتیجه می دهد:

$$\boxed{\begin{aligned} a(r > R) &= -\frac{4}{3}\pi G\rho R^3 \frac{1}{r^2} \\ a(r = R) &= -\frac{4}{3}\pi G\rho R \\ a(r < R) &= -\frac{4}{3}\pi G\rho r \end{aligned}} \qquad (۳٤-۲)$$

مسئله ۲- مطلوبست محاسبه پتانسیل جاذبه برای یک پوسته کروی همگن توپر مطابق شکل (۲-۷) که شعاع داخلی آن R_1 و شعاع خارجی آن R_2 باشد. برای نقاط واقع در الف- خارج پوسته کروی $(r > R_2)$ ب- درون پوسته کروی $(R_1 < r < R_2)$ ج- داخل پوسته کروی $(r < R_1)$



شکل ۲-۷: پتانسیل جاذبه برای پوسته کروی

مسئله ۳- ساختار اساسی زمین شعاعی است: هسته داخلی، هسته خارجی، منتل و پوسته. فرض کنید زمین دارای ساختمان ساده ذیل باشد:

هسته: $R_C = 3500km \ , \rho_C = 10500kgm^{-3}$

منتل: $R_m = 6400km \ , \rho_m = 4500kgm^{-3}$

به کمک نتیجه بدست آمده برای مسئله ۲، پتانسیل و شدت میدان جاذبه را در در طول یک مقطع شعاعی برای ساختار فوق محاسبه و ترسیم کنید.

۲. ۵. ۲. میدان جاذبه استوانه توپر همگن

محاسبه شتاب جاذبه یک استوانه برای محاسبه تصحیحات مربوط به انتقال جاذبه از یک نقطه در سطح زمین به درون آن (مثلا به روی ژئوئید) می تواند مفید باشد و همچنین برای مدلسازی ایزوستازی و مدل سازی از جاذبه لایه سطحی زمین حائز اهمیت است. برای راحتی در انجام محاسبات مرکز سیستم مختصات را در مرکز استوانه فرض می کنیم به گونه ای که محور z از مرکز تقارن استوانه عبور نماید. شعاع استوانه را R و ارتفاع آنرا h تصور می کنیم. مجددا نقطه محاسبه (P) را جائی بر روی قسمت مثبت محور مختصات z فرض نمائید. مانند حل مسئله برای حالتی که با کره سروکار داشتیم اینبار نیز سیستم مختصات مناسب با هندسه جسم را انتخاب می کنیم که در این مورد سیستم مختصات استوانه ای خواهد بود (r,λ,z):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\lambda \\ r\sin\lambda \\ z \end{pmatrix} \qquad (۳۵-۲)$$

برای بیان مختصات نقطه محاسبه P و جرم نقطه ای Q متعلق به جسم استوانه ای از بردارهای ذیل استفاده می کنیم:

$$\bar{\mathbf{r}}_Q = \begin{pmatrix} r\cos\lambda \\ r\sin\lambda \\ z \end{pmatrix},\ r_Q = \sqrt{r^2+z^2}\ ,\ \bar{\mathbf{r}}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_P \end{pmatrix},\ r_P = z_P \qquad (۳۶-۲)$$

و

$$\bar{\mathbf{r}}_{PQ} = \bar{\mathbf{r}}_Q - \bar{\mathbf{r}}_P = \begin{pmatrix} r\cos\lambda \\ r\sin\lambda \\ z-z_P \end{pmatrix},\ r_{PQ} = \sqrt{r^2+(z_p-z)^2} \qquad (۳۷-۲)$$

عنصر حجمی $dxdydz$ تبدیل به $rd\lambda drdz$ می شود و حدود انتگرال گیری عبارت از $\int_{z=-h/2}^{h/2}\int_{r=0}^{R}\int_{\lambda=0}^{2\pi}$ خواهند بود. به دلیل اینکه فرآیند انتگرال گیری برای محاسبه تابع پتانسیل جاذبه به سر انجام نسبتا پیچیده ای منجر می شود. بنابراین ترجیح می دهیم که مستقیما شتاب جاذبه را حساب کنیم از بکار گیری رابطه (۲-۲۲) نتیجه ذیل عاید می گردد:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}}_p &= -G\rho \int_{z=-h/2}^{h/2}\int_{r=0}^{R}\int_{\lambda=0}^{2\pi} \frac{1}{r_{PQ}^3}\begin{pmatrix} r\cos\lambda \\ r\sin\lambda \\ z-z_p \end{pmatrix} rd\lambda drdz \\ &= -2\pi G\rho \int_{z=-h/2}^{h/2}(z-z_p)\int_{r=0}^{R}\frac{1}{r_{PQ}^3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} rdrdz\end{aligned} \qquad (۳۸-۲)$$

بنابراین بر روی محور تقارن شتاب جاذبه فقط یک مولفه قائم خواهد داشت و فاقد مولفه های x و y است. تعبیر فیزیکی این مطلب به این صورت می تواند باشد که به دلیل تقارن جسم حول محور z نیروی های جاذبه حاصل از جرمهای نقطه ای Q متعلق به استوانه مولفه های x و y یکدیگر را خنثی می کنند و فقط مولفه های z هستند که با یکدیگر جمع می شوند.

همانند مسئله قبل برای راحت حل شدن انتگرال از تغییر متغییر $l = r_{PQ}$ این بار به جای r استفاده می کنیم:

$$\frac{dl}{dr} = \frac{d\sqrt{r^2 + (z_P - z)^2}}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z_P - z)^2}} = \frac{r}{l} \Rightarrow \frac{r}{l} dr = dl \quad (۳۹-۲)$$

بنابراین انتگرال به صورت ساده ذیل تبدیل می شود:

$$a_P = -2\pi G\rho \int_{z=-h/2}^{h/2} (z - z_P) \int_{l=l_-}^{l=l_+} \frac{1}{l^2} dl dz = +2\pi G\rho \int_{z=-h/2}^{h/2} (z - z_P) \left[\frac{1}{l}\right]_{l_-}^{l_+} dz \quad (۴۰-۲)$$

اکنون باید حدود بالا و پائین l را تعیین کنیم. همانند ۲. ۵. ۱ با دو وضعیت[1] مواجهیم یکی حالتیست که نقطه محاسبه را در فضای خارج استوانه فرض کنیم و حالت دوم موقعیست که آنرا درون استوانه در نظر بگیریم. در حالتیکه $z_P > h/2$ می باشد،حدود ذیل را خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} r = 0 &\Rightarrow l_- = z_P - z \\ r = R &\Rightarrow l_+ = \sqrt{R^2 + (z_P - z)^2} \end{aligned} \quad (۴۱-۲)$$

و بنابراین :

$$a_P = 2\pi G\rho \int_{z=-h/2}^{h/2} (z - z_P) \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z_P - z)^2}} - \frac{1}{z_P - z} \right) dz = 2\pi G\rho \int_{z=-h/2}^{h/2} \left(\frac{z - z_P}{\sqrt{R^2 + (z_P - z)^2}} + 1 \right) dz$$

$$= 2\pi G\rho \left[\sqrt{R^2 + (z_P - z)^2} + z \right]_{-h/2}^{h/2} = 2\pi G\rho \left(h + \sqrt{R^2 + (z_P - h/2)^2} - \sqrt{R^2 + (z_P + h/2)^2} \right)$$

(۴۲-۲)

حالا که انتگرال گیری بر روی z نمایش داده شد می توانیم برای راحتی در فرمول به جای z_P از z استفاده کنیم:

$$a(z > h/2) = 2\pi G\rho \left(h + \sqrt{R^2 + (z - h/2)^2} - \sqrt{R^2 + (z + h/2)^2} \right) \quad (۴۳-۲)$$

یادآوری می شود که رابطه فوق در فضای خارج از استوانه ودر راستای مثبت محور z (محور تقارن استوانه) بدست آمده است. در حالتیکه نقطه محاسبه را خارج از استوانه و در راستای منفی محور z فرض کنیم به عبارت دیگر $z < -h/2$ باشد، به سادگی می توانیم z را با $-z$ جایگزین نمائیم:

$$\begin{aligned} a(z < -h/2) &= -2\pi G\rho \left(h + \sqrt{R^2 + (-z - h/2)^2} - \sqrt{R^2 + (-z + h/2)^2} \right) \\ &= +2\pi G\rho \left(-h + \sqrt{R^2 + (z - h/2)^2} - \sqrt{R^2 + (z + h/2)^2} \right) \end{aligned} \quad (۴۴-۲)$$

و در حالتیکه نقطه P درون استوانه فرض شود ابتدا باید بدانیم که شتاب جاذبه در روی سطح استوانه و در زیر آن چقدر است؟ به عبارت دیگر به ازای $z = h/2$ و $z = -h/2$ در روابط (۲-۴۳) و (۲-۴۴) مقدار شتاب جاذبه را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} a(h/2) &= 2\pi G\rho (h + R - \sqrt{R^2 + h^2}) \\ a(-h/2) &= 2\pi G\rho (-h + \sqrt{R^2 + h^2} - R) \end{aligned} \quad (۴۵-۲)$$

و توجه کنید که $a(h/2) = -a(-h/2)$ می باشد. به منظور محاسبه شدت جاذبه در فضای درون استوانه آنرا به صورت دو استوانه مجزا که درست در نقطه محاسبه با یکدیگر مماس هستند تصور می کنیم. نقطه محاسبه در بالای استوانه ای به ارتفاع $h/2 + z$ و در زیر استوانه ای به ارتفاع $h/2 - z$ قرار می گیرد که اگر به کمک (۲-۴۵) شدت میدان جاذبه دو استوانه فرضی مذکور را در نقطه P بدست آوریم:

شدت میدان جاذبه در زیر کف استوانه بالائی : $2\pi G\rho \left(-(h/2 - z) + \sqrt{R^2 + (h/2 - z)^2} - R \right)$

شدت میدان جاذبه بر روی سقف استوانه پائینی : $2\pi G\rho\left((h/2+z)-\sqrt{R^2+(h/2+z)^2}+R\right)$

بنابر اصل بر هم نهی شدت میدان جاذبه در نقطه محاسبه برابر مجموع این دو خواهد شد:

$$\Rightarrow a(-h/2<z<h/2)=2\pi G\rho\left(2z+\sqrt{R^2+(z-h/2)^2}-\sqrt{R^2+(z+h/2)^2}\right) \quad (۲-۴۶)$$

به طور خلاصه روابط (۲-۴۳)، (۲-۴۴) و (۲-۴۶) را می توان به شکل ذیل نوشت:

$$\boxed{a(z)=2\pi G\rho\left(\begin{Bmatrix} h \\ 2z \\ -h \end{Bmatrix}+\sqrt{R^2+(z-h/2)^2}-\sqrt{R^2+(z+h/2)^2}\right)\begin{matrix} z>h/2 \\ -h/2<z<h/2 \\ z<-h/2 \end{matrix}}$$

(۲-۴۷)

۲. ۵. ۲. میدان جاذبه صفحه ای به ابعاد نامحدود و ضخامت معلوم

با استفاده از رابطه (۲-۴۷) به راحتی می توان شدت جاذبه ناشی از یک صفحه به ابعاد نامحدود را با ضخامت h بدست آورد. دراین رابطه اگر R شعاع استوانه به سمت بی نهایت میل کند آنگاه :

$$\lim_{R\to\infty} a(z)=2\pi G\rho\begin{cases} h & \text{بالای صفحه} \\ 2z & \text{درون صفحه} \\ -h & \text{زیر صفحه} \end{cases} \quad (۲-۴۸)$$

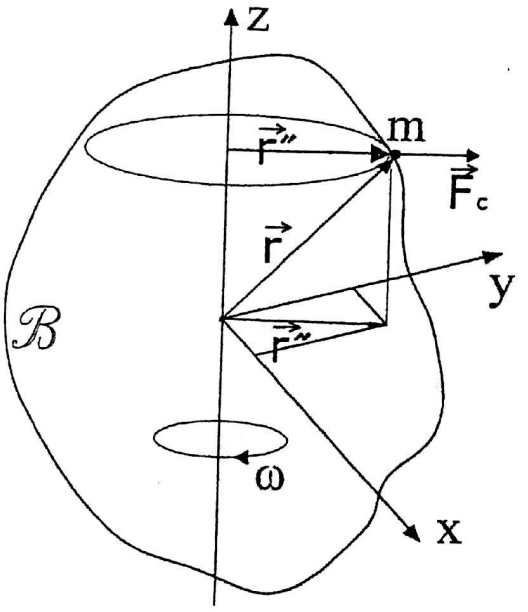
وقتی شعاع استوانه به سمت بی نهایت میل می کند استوانه تبدیل به صفحه ای با ابعاد بینهایت می شود اگر $R\to\infty$ آنگاه $R^2+(z\pm h/2)^2\approx R^2$ و $\lim_{R\to\infty}\sqrt{R^2+(z-h/2)^2}-\sqrt{R^2+(z+h/2)^2}=0$

از رابطه (۲-۴۸) نتیجه مهمی که بدست می آید اینست که در بالا یا پایین صفحه شتاب جاذبه به اندازه z دیگر هیچ ارتباطی ندارد به عبارت دیگر جسم ایده آلی را یافته ایم که با دور شدن از آن و یا نزدیک شدن به آن شدت میدان جاذبه اش تغییر نمی کند و در فضای اطراف آن ثابت باقی می ماند همانطور که در فصل ٦ خواهیم دید رابطه (۲-۴۸) در انتقال اندازه شتاب جاذبه زمین (g) از سطح زمین به نقطه ای به عمق h درون آن اهمیت به سزائی دارد.

۲. ۶.میدان نیرو و پتانسیل گریز از مرکز

جسمی را در نظر بگیرید که با سرعت زاویه ای ثابت ω حول یک محور که از مرکز جسم می گذرد در حال دوران باشد (شکل ۲- ۸). به جسمی به جرم m که در فاصله r'' از محور دوران جسم قرار گرفته است و به همراه جسم B می چرخد نیروی گریز از مرکزی وارد می شود که جرم را به سمت دور شدن از محور دوران هدایت می کند(توجه کنید که جرم m در رو یا خارج از جسم B قرار دارد و به همراه آن دوران می کند). اندازه این نیروی گریز از مرکز[8] برابر با : (۲-۴۹) $F_C = mr''\omega^2$ می باشد و اندازه شدت میدان گریز از مرکز از رابطه (۲-۵۰) $\bar{a}_C = \frac{F_C}{m} = \omega^2 r''$ بدست می آید. فرم برداری این رابطه به شکل زیر می باشد: (۲-۵۱)

$$\bar{\mathbf{a}}_C(\bar{\mathbf{r}}) = \omega^2 \bar{\mathbf{r}}''$$



شکل ۲-۸ : میدان نیروی گریز از مرکز جسم دوران کننده B

در شکل فوق $\bar{\mathbf{r}}$ بردار موقعیت نقطه ای است که می خواهیم شدت میدان نیروی گریز از مرکز را برای آن تعیین نمائیم و مطابق شکل اگر سیستم مختصات را طوری تعریف کنیم که محور z آن منطبق بر محور دوران جسم قرار گیرد آنگاه بردار $\bar{\mathbf{r}}''$ را می توانیم بصورت $\bar{\mathbf{r}}'' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ نشان دهیم که در حقیقت تصویر بردار $\bar{\mathbf{r}}$ در صفحه xy می باشد. دقت کنید که سیستم مختصات فوق به همراه جسم دوران می کند و اینرشیال نیست یعنی اگر جسم دوران کننده را زمین فرض کنیم، سیستم مختصات فوق زمین وابسته (Earth fixed) خواهد بود. میدان نیروی گریز از مرکز نیز یک میدان پایستار است $\left(\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{a}}_C = \bar{\mathbf{0}}\right)$. بنابراین می توان با حفظ خصوصیات، میدان اسکالر پتانسیل را با آن جایگزین کرد. پتانسیل گریز از مرکز از رابطه زیر بدست می آید:

$$V_C = \frac{1}{2}\omega^2 r''^2 \quad (۲-۵۲)$$

[8] Centrifugal force

برای اثبات موضوع کافیست از رابطه (۲-۵۲) گرادیان بگیریم $(r''^2 = x^2 + y^2)$

$$\bar{\nabla}(V_C) = \frac{1}{2}\omega^2 \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(r''^2)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial(r''^2)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial(r''^2)}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\omega^2 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = \omega^2 \bar{\mathbf{r}}'' = \bar{\mathbf{a}}_C \qquad (۲-۵۳)$$

۲.۷. میدان نیرو و پتانسیل ثقل

برای جسمی که هم دارای میدان نیروی جاذبه و هم میدان نیروی گریز از مرکز می باشد می توان یک میدان نیروی واحد در نظر گرفت که حاصل جمع برداری این دو میدان با یکدیگر است و آنرا میدان نیروی ثقل می نامند: شتاب گریز از مرکز + شتاب جاذبه = شتاب ثقل یعنی : (۲-۵۴) $\boxed{\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}_g + \bar{\mathbf{a}}_C}$

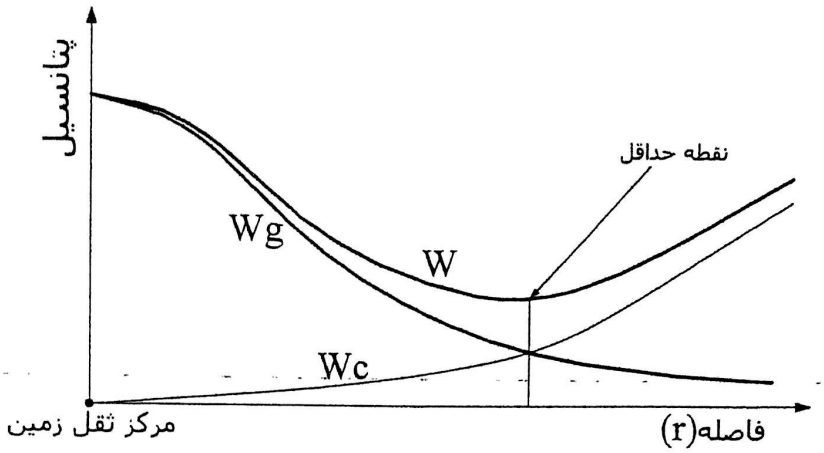
برای کره زمین شتاب جاذبه را با $\bar{\mathbf{g}}_g$، شتاب گریز از مرکز را با $\bar{\mathbf{g}}_C$ و شتاب ثقل $\bar{\mathbf{g}}$ را با نمایش می دهیم :

$$\boxed{\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{r}}) = \bar{\mathbf{g}}_g(\bar{\mathbf{r}}) + \bar{\mathbf{g}}_C(\bar{\mathbf{r}})} \qquad (۲-۵۵)$$

در حوزه میدان ثقل زمین به هر جسمی به جرم m نیروئی معادل $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_g + \bar{\mathbf{F}}_C = m\bar{\mathbf{g}}_g + m\bar{\mathbf{g}}_C$ وارد می گردد. دو نیروی $\bar{\mathbf{F}}_g$ و $\bar{\mathbf{F}}_C$ به هر جسمی که در رو و یا بالای زمین قرار گرفته است و به همراه زمین دوران می کند وارد می شوند. اگر $g_g > g_C$ جسم به سمت زمین جذب می شود و اگر $g_C > g_g$ جسم به سمت خارج زمین رانده خواهد شد. پتانسیل ثقل نیز به صورت مجموع پتانسیل های جاذبه و گریز از مرکز تعریف می گردد، برای زمین پتانسیل جاذبه را با W_g و پتانسیل گریز از مرکز را با W_C نشان می دهیم :

$$\boxed{W(\bar{\mathbf{r}}) = W_g(\bar{\mathbf{r}}) + W_C(\bar{\mathbf{r}}) = G\iiint_B \frac{\rho(\bar{\mathbf{r}}')}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|} d\mathrm{B} + \frac{1}{2}\omega^2 r''^2} \qquad (۲-۵۶)$$

در رابطه فوق $\bar{\mathbf{r}}$ بردار موقعیت نقطه ای است که می خواهیم پتانسیل ثقل را برای آن محاسبه کنیم. مبدا سیستم مختصات مورد استفاده مرکز ثقل زمین و محور z آن منطبق بر محور محور دوران لحظه ای زمین می باشد r'' اندازه تصویر بردار $\bar{\mathbf{r}}$ در صفحه xy (استوا) است. با دور شدن از سطح زمین یعنی با افزایش $\bar{\mathbf{r}}$ مقدار W_g کاهش و W_C افزایش پیدا می کند(شکل ۲-۹).



شکل ۲-۹ : نمایش تغییرات پتانسیل جاذبه ، گریز از مرکز و ثقل با افزایش فاصله از مرکز ثقل زمین

در نقطه ای که مقدار W حداقل می باشد اندازه پتانسیل های جاذبه و گریز از مرکز باهم برابر است $(W_g = W_C)$. بردار موقعیت این نقطه مشخص کننده مدار مناسب برای قرار گرفتن ماهواره هائی است که به همراه زمین دوران می کنند و همیشه در یک وضعیت ثابت نسبت به زمین قرار دارند این ماهواره ها همواره بخش خاصی از زمین را پوشش می دهند (نظیر ماهواره های مخابراتی). در این مدار بردار شتاب ثقل $(\vec{g})$ فاقد مولفه شعاعی است و فقط مولفه مماسی خواهد داشت. اگر بخواهیم به کمک رابطه (۲-۵۶) پتانسیل ثقل زمین را محاسبه کنیم، همانند اجسام ایده آلی که میدان جاذبه آنها را مطالعه نمودیم به چند مشکل برخورد خواهیم نمود. اول اینکه برای حل انتگرال باید جسم مورد نظر دارای یک شکل دقیق هندسی باشد که در دنیای واقعی و علی الخصوص در مورد زمین چنین امری صدق نمی کند البته می توان یک شکل هندسی ایده آل هم اندازه و هم جرم با زمین را جایگزین نمود (بیضوی) که با مقداری تقریب میدان جاذبه زمین برآورد می گردد و میزان این تقریب به حدی خواهد بود پاسخگوی همه نیازهای ما در ژئودزی نیست و در بسیاری جاها اختلاف آن با اندازه واقعی قابل چشم پوشی نیست. البته از چنین جسم ایده آلی به عنوان مدل برای میدان جاذبه زمین استفاده خواهیم نمود و این مطلب را در فصل ٤ خواهید دید.

مسئله دیگری که کار ما را در ارتباط با توصیف دقیق میدان جاذبه زمین با استفاده از رابطه (۲-۵۶) مشکل می کند، عدم اطلاع کافی از نحوه دقیق توزیع چگالی جرم در زمین است زیرا که زمین از لایه های مختلف با ضخامتها و چگالی های مختلف تشکیل گردیده است که ما به خوبی از جزئیات آن اطلاع نداریم بعلاوه اینکه زمین اساسا یک جسم صلب هم نیست و تغییر شکل آن در حین حرکت باعث می شود چگالی آن علاوه بر موقعیت به زمان هم وابسته باشد و این خودش حل مسئله را به مراتب دشوار تر می سازد. البته تغییر چگالی با زمان بیشتر در مورد هسته زمین و لایه های مذاب درونی آن می باشد که تاثیر نسبی آن بر روی جاذبه در سطح زمین اندک است. بطور کلی دو راه برای مطالعه میدان جاذبه زمین وجود دارد هم اکنون با اولین روش آشنا شده ایم وآن تعیین میدان جاذبه با اطلاع دقیق از چگالی درونی زمین می باشد روش دوم تعیین میدان جاذبه از روی مشاهدات مربوط به شدت میدان جاذبه در سطح زمین و در فواصل نسبتا کم از سطح زمین (با توجه به ابعاد کره زمین) می باشد. به عبارت دیگر در روش دوم با مشاهده رفتار خارجی میدان جاذبه خصوصیات فیزیکی آنرا به کمک فرمول بندی ریاضی توصیف خواهیم نمود در فصل بعدی با جزئیات این روش آشنا خواهید شد.

۳. نظریه پتانسیل[1]

نظریه پتانسیل شاخه ای از ریاضیات فیزیک[2] است که در مورد پتانسیلها و مسائل مقدار مرزی بحث می کند. ابزار مورد استفاده در آن عبارتند از : تحلیل بردارها[3]، حساب دیفرانسیل و انتگرال، معادلات دیفرانسیل جزئی، معادلات انتگرال و چند نظریه و اتحاد مختلف از گاوس، استوکس و گرین. نظریه پتانسیل، رفتار پتانسیلها را از هر نوعی که باشند توصیف می کند. لذا این نظریه دارای کاربردهای متعددی در علوم متفاوتی نظیر هیدرودینامیک، الکترو مغناطیس و البته نظریه جاذبه می باشد. در انتهای فصل قبل دیدیم که به دلیل مشخص نبودن مقدار دقیق چگالی قسمتهای مختلف زمین امکان محاسبه پتانسیل جاذبه بصورت دقیق از رابطه (۲-۲۶) وجود نداشت، بعلاوه اینکه در ژئودزی فیزیک حتی شکل جسم تولید کننده جاذبه (یعنی ژئوئید) نیز باید مجهول فرض شود. سوال دیگر اینست که آیا می توان پتانسیل ثقل خارجی زمین را با معلوم بودن مقادیری از آن یا معلوم بودن مشتق آن بر روی سطح جسم (ژئوئید) تعیین نمود؟ این یک مسئله مقدار مرزی است که در این فصل به آن پاسخ خواهیم داد.در ابتدامفاهیم اولیه ای از حساب دیفرانسیل بردارها را مرور می کنیم.

۳.۱. یادآوری قواعدی از حساب دیفرانسیل برداری

در آغاز عملگرهای برداری پایه را که با استفاده از اپراتور $\vec{\nabla}$ (نابلا) و نام آنها شناخته می شوند را می نویسیم (توجه داشته باشید که u را تابعی اسکالر و $\vec{\mathbf{f}}$ را تابعی برداری فرض کرده ایم):

$$\hat{\mathbf{k}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\hat{\mathbf{j}}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\hat{\mathbf{i}}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ که در آن } \vec{\mathbf{f}}=\begin{pmatrix}f_x\\f_y\\f_z\end{pmatrix}=f_x\hat{\mathbf{i}}+f_y\hat{\mathbf{j}}+f_z\hat{\mathbf{k}} \text{ و } u=u(x,y,z)$$

۱) گرادیان :

$$\vec{\nabla}u=\overrightarrow{\mathbf{grad}}(u)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\\dfrac{\partial u}{\partial y}\\\dfrac{\partial u}{\partial z}\end{pmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial u}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial u}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۳-۱)$$

۲) دیورژانس :

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{f}}=div(\vec{\mathbf{f}})=\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z} \qquad (۳-۲)$$

۳) کرل :

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{f}}=\overrightarrow{\mathbf{curl}}(\vec{\mathbf{f}})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_z}{\partial y}-\dfrac{\partial f_y}{\partial z}\\\dfrac{\partial f_x}{\partial z}-\dfrac{\partial f_z}{\partial x}\\\dfrac{\partial f_y}{\partial x}-\dfrac{\partial f_x}{\partial y}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{i}}&\hat{\mathbf{j}}&\hat{\mathbf{k}}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\f_x&f_y&f_z\end{pmatrix} \qquad (۳-۳)$$

---

[1] potential theory
[2] mathematical physics
[3] vector analysis

۴) لاپلاسین : (۴-۳)

$$\Delta u = del(u) = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}u = div(\overrightarrow{\mathbf{grad}}(u)) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

۵) خصوصیات پایه : (۵-۳)

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}u = \vec{0} \quad , \quad \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{f}}) = 0$$

۶) قواعد زنجیره ای : (۶-۳)

$$\vec{\nabla}(uv) = u\vec{\nabla}v + v\vec{\nabla}u$$
$$\vec{\nabla}.(u\vec{\mathbf{f}}) = \vec{\mathbf{f}}.\vec{\nabla}u + u\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{f}}$$
$$\vec{\nabla}\times(u\vec{\mathbf{f}}) = \vec{\nabla}u\times\vec{\mathbf{f}} + u\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{f}}$$
$$\vec{\nabla}.(\vec{\mathbf{f}}\times\vec{\mathbf{g}}) = \vec{\mathbf{g}}.(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{f}}) - \vec{\mathbf{f}}.(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{g}})$$

۷) قوانینی که برای تابع برداری $\vec{\mathbf{r}}$ و $r = |\vec{\mathbf{r}}|$ صدق می کنند:

$$\vec{\nabla}r^n = nr^{n-2}\vec{\mathbf{r}}$$
$$\vec{\nabla}.r^n\vec{\mathbf{r}} = (n+3)r^n$$
$$\vec{\nabla}\times r^n\vec{\mathbf{r}} = \vec{0}$$
$$\Delta r^n = \vec{\nabla}.(nr^{n-2}\vec{\mathbf{r}}) = n(n+1)r^{n-2}$$

(۷-۳)

۳. ۲. دیورژانس میدان جاذبه

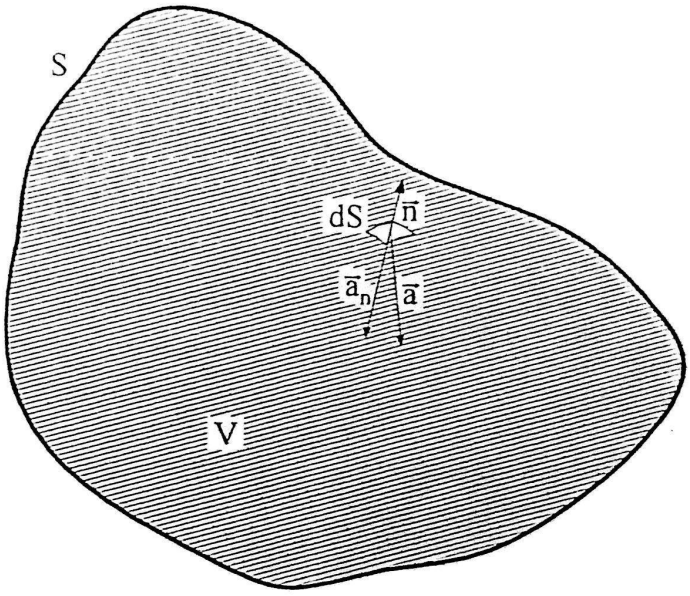
ابتدا قصد داریم مقدار شارش میدان جاذبه را حساب کنیم. جسمی با حجم V و سطح رویه محدب و بسته S را در نظر می گیریم. تعریف شار *(flux)* یک میدان برداری (با اندکی تسامح) مقدار بردارهائی است که از یک سطح معین از یک جسم می گذرند (برای تقریب به ذهن جریان آب را در مقطعی عرضی از یک رودخانه را در نظر بگیرید). مقدار این بردارها با ضرب اسکالر میدان برداری در راستای قائم بر سطح در مساحت جسم بدست می آید. میدان برداری $\vec{\mathbf{a}}$ که توسط سطح بسته S تولید می گردد را در نظر بگیرید یک قطعه بسیار کوچک از این سطح را با dS نشان می دهیم. میزان شاری که از این سطح کوچک می گذرد بنابر تعریف عبارتست از : $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{n}}dS$ و همانطور که می دانید $\vec{\mathbf{n}}$ بردار یکه قائم بر dS می باشد و جهت آن به سمت بیرون است (شکل ۳-۱) و می دانیم که : $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{n}} = a\cos\alpha = a_n$ زیرا که اندازه $\vec{\mathbf{n}}$ برابر ۱ است و α زاویه بین بردار میدان و بردار قائم بر سطح است و a_n اندازه تصویر بردار میدان در راستای قائم بر سطح می باشد و نتیجه اینکه شار در هر جزء کوچک از سطح برابر با حاصلضرب اندازه بردار میدان نیرو در راستای قائم بر سطح در مساحت آن بخش کوچک می باشد: $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{n}}dS = a_n dS$ (۸-۳)

برای محاسبه شار کل میدان حاصل از یک جسم با سطح بسته S کافیست که از رابطه فوق بر روی سطح جسم انتگرال بگیریم : $\varphi = \oiint_S \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\, ds$ (۹-۳)

اکنون یک سطح کروی با شعاع r در نظر بگیرید. بردار قائم بر سطح برابر با $\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}$ می باشد و اگر از سیستم مختصات کروی استفاده کنیم : $dS = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\lambda$ فرض کنید میدان جاذبه مورد نظر ما توسط یک جرم نقطه ای m درون کره تولید شده باشد، آنگاه : $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{n}}ds = -\frac{Gm}{r^3}\vec{\mathbf{r}}\cdot\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}r^2\sin\theta\, d\theta\, d\lambda$ و شار حاصل از میدان جاذبه جرم نقطه ای m برای سطح کروی S از این رابطه بدست می آید :

$$\varphi = \oiint_S \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\, ds = 2\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}(-Gm)\sin\theta\, d\theta\, d\lambda = -4\pi Gm \qquad (۱۰-۳)$$

که مقداری ثابت و مستقل از شعاع کره (r) می باشد و دلیل آن اینست که با افزایش فاصله از جرم نقطه ای شدت میدان به نسبت $\frac{1}{r^2}$ کاهش می یابد در حالیکه سطح کره به نسبت r^2 افزایش می یابد و این دو یکدیگر را خنثی می کنند. رابطه (۳-۱۰) آنقدر کلی است که شامل همه سطوح بسته محدب می شود و فقط منحصر به کره نیست.



شکل ۳-۱ : شار میدان برداری جاذبه برای جسمی به حجم V و محصور در سطح S

حال فرض کنید به جای یک جرم نقطه ای مجموعه ای از جرمهای نقطه ای m_i درون سطح بسته S داشته باشیم که در این صورت شار کل حاصل از آنها برابر مجموع شارهای حاصل از تک تک آنهاست (می دانید که شار کمیتی اسکالر است) :

$$\varphi = \oiint_S \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{n}}\, ds = -4\pi G \sum_i m_i \quad (۱۱-۳)$$

اگر این رابطه را از حالت گسسته به پیوسته تبدیل نمائیم :

$$\varphi = \oiint_S \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{n}}\, ds = -4\pi G \iiint_V dm = -4\pi G \iiint_V \rho\, dV = -4\pi G M \quad (۱۲-۳)$$

در رابطه فوق به طور ضمنی فرض شده است که سطح S دارای حجم V می باشد. این رابطه به صراحت اعلام می دارد که می توان جرم یک جسم را فقط با دانستن میدان جاذبه در سطح آن تعیین نمود و نیازی به معلوم بودن ساختار چگالی جسم نیست و این اولین ایده را در مورد مسئله مقدار مرزی به ما می دهد.

بار دیگر به رابطه (۳-۱۲) باز می گردیم و حالا قصد داریم مقدار شار را برای هر واحد حجم حساب کنیم یعنی باید بر V تقسیم کنیم. اگر حجم به سمت صفر میل کند آنگاه تعریف دیورژانس میدان برداری جاذبه را خواهیم داشت :

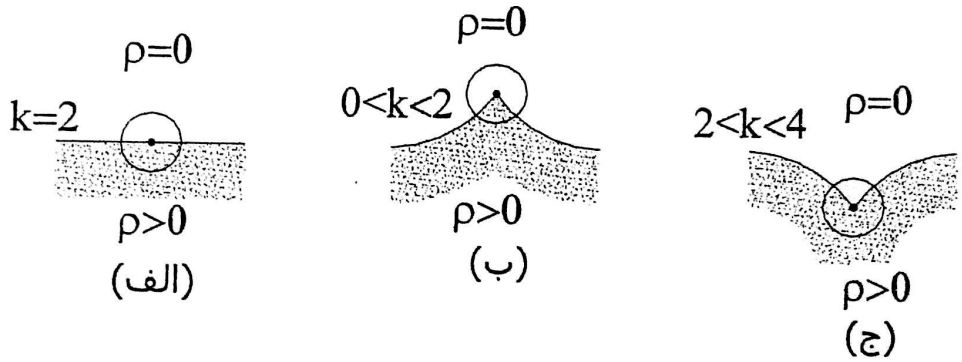
$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{a}} = div(\bar{\mathbf{a}}) = \lim_{V \to 0} \frac{\varphi}{V} = \lim_{V \to 0} \frac{\oiint_S \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{n}}\, ds}{V} = \lim_{V \to 0} \frac{-4\pi G \iiint_V \rho\, dV}{V} = -4\pi G \rho \quad (۱۳-۳)$$

هر گاه دیورژانس یک میدان برداری منفی باشد آنگاه گفته می شود که یک شاره چاهک (sink) وجود دارد و هرگاه مثبت باشد گفته می شود که یک شاره چشمه (source) وجود دارد. از آنجائی که دیورژانس میدان جاذبه منفی است بنابراین شارش آن به صورت چاهک است.

رابطه (۳-۱۳) نشان می دهد که دیورژانس میدان جاذبه مستقیما وابسته به چگالی در نقطه محاسبه است :

$$div(\bar{\mathbf{a}}) = \begin{cases} -4\pi G\rho & \text{برای نقاط واقع در درون جسم} \\ 0 & \text{برای نقاط واقع در خارج جسم} \\ -k\pi G\rho & \text{برای نقاط واقع در روی سطح جسم} \end{cases} \qquad (۳-۱٤)$$

برای نقاط خارج از جسم چگالی را صفر فرض کرده ایم یعنی جسم مورد نظر در یک فضای خلاء قرار دارد و برای نقاط درون جسم چگالی را ρ گرفته ایم که می تواند تابعی از بردار موقعیت درون جسم باشد. نکته ای که باید روشن گردد برای نقاط روی سطح جسم است که در مرز بین چگالی صفر و چگالی درون جسم قرار دارند. برای این نقاط مرزی چگالی را به صورت کسری از چگالی نقطه ای که در درون جسم قرار گرفته است در نظر می گیریم. به شکل (۳-۲) توجه کنید با توجه به نحوه وضعیت قرار گرفتن نقطه بر روی سطح جسم مقدار ضریب k می تواند مقادیر متفاوتی بین 0 تا 4 داشته باشد: $k \in (0,4)$



شکل ۳-۲ : نمایش حالتهای مختلفی که برای قرار رفتن نقطه روی سطح جسم ممکن است اتفاق بیافتد

در شکل فوق با توجه به دایره ای که محدوده همسایگی اطراف نقطه محاسبه را مشخص می کند مقدار ضریب k برای نقاط واقع در روی جسم تعیین می گردد و بستگی دارد به اینکه چقدر از این همسایگی درون جسم و چقدر از آن در خارج جسم واقع گردد. بار دیگر به تعریف دیورژانس و رابطه (۳-۱۳) باز می گردیم، می دانیم که میدان جاذبه گرادیان تابع پتانسیل است. برای زمین می توانیم رابطه ذیل را در ارتباط با میدان جاذبه بیان کنیم :

$$\bar{\mathbf{g}}_g = \bar{\nabla} W_g = \frac{\partial W_g}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial W_g}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial W_g}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۳-۱۵)$$

اگر از رابطه بالا دیورژانس بگیریم:

$$div(\bar{\mathbf{g}}_g) = \bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla} W_g = \Delta(W_g) = \frac{\partial^2 W_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_g}{\partial z^2} \qquad (۳-۱٦)$$

و با در نظر گرفتن رابطه (۳-۱٤) به نتیجه ذیل خواهیم رسید :

$$\Delta W_g = \frac{\partial^2 W_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_g}{\partial z^2} = \begin{cases} -k\pi G\rho & \text{برای نقاط واقع در رو و یا درون زمین} \quad 0 < k \le 4 \\ 0 & \text{برای نقاط خارج زمین} \end{cases} \quad (۳-۱۷)$$

معادله (۳-۱۷) برای نقاط خارج از زمین فقط هنگامی که از چگالی اتمسفر صرفنظر کنیم صدق خواهد کرد. برای این نقاط لاپلاسین تابع پتانسیل جاذبه صفر است و برای محاسبه W_g باید یک معادله دیفرانسیل همگن را به شکل مقابل حل کنیم:

$$\frac{\partial^2 W_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_g}{\partial z^2} = 0 \quad (۳-۱۸)$$

به معادله فوق معادله دیفرانسیل لاپلاس[4] گفته می شود و اگر نقطه را در روی زمین یا درون آن فرض کنیم، یک معادله دیفرانسیل غیر همگن خواهیم داشت که به آن معادله دیفرانسیل پواسن گفته می شود:

$$\frac{\partial^2 W_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_g}{\partial z^2} = -k\pi G\rho \quad ,(0 < k \le 4) \quad (۳-۱۹)$$

و به این معادله، معادله دیفرانسیل پواسن[5] می گویند. دقت کنید که $\rho = \rho(\bar{r})$ و $W_g = W_g(\bar{r})$ است. این دو معادله از معادلات بنیادین در ژئودزی فیزیک هستند و دارای اهمیت زیادی می باشند. اکنون قصد داریم که دیورژانس میدان گریز از مرکز زمین را تعیین کنیم. در فصل قبل دیدیم : $W_C = \frac{1}{2}\omega^2 r''^2 = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$ که اگر لاپلاسین آنرا حساب کنیم، خواهیم داشت :

$$\Delta(W_C) = \frac{\partial^2 W_C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_C}{\partial z^2} = \frac{1}{2}\omega^2[2+2+0] = 2\omega^2 \quad (۳-۲۰)$$

حالا می توانیم لاپلاسین تابع پتانسیل ثقل را محاسبه کنیم :

$$\Delta(W(\bar{r})) = \Delta(W_g + W_C) = \begin{cases} 2\omega^2 & \text{برای نقاط واقع در خارج جسم} \\ -k\pi G\rho(\bar{r}) + 2\omega^2 & \text{برای نقاط واقع در درون و یا روی جسم} \end{cases} \quad (۳-۲۱)$$

این دو معادله این حقیقت را آشکار می سازند که مشتقات دوم تابع پتانسیل ثقل بر روی مرز بین هر دو جسم با چگالی متفاوت (مثلا سطح زمین) ناپیوسته هستند. از این واقعیت به شکل گسترده ای در فصل بعد استفاده خواهد شد. به طور مشخص، مسئله تعیین میدان ثقل زمین می تواند به دو بخش تعیین میدان جاذبه و تعیین میدان گریز از مرکز تفکیک گردد. که اولی کاری دشوار است ولی در مورد میدان گریز از مرکز اینچنین نیست زیرا که $\bar{g}_C$ تابعی ساده از موقعیت است و سرعت زاویه ای دوران زمین نیز با دقت بسیار زیادی معلوم است. پس عمده مطلبی که باقی می ماند بحث در مورد تعیین میدان جاذبه است که مطالب بعدی را در این فصل به خود اختصاص می دهد. از این قسمت به بعد تمرکز مطالب در مورد بحث و بررسی و نهایتا حل معادله دیفرانسیل لاپلاس خواهد بود.

---

[4] Laplace's equation
[5] Poisson's equation

۳.۳. مسائل مقدار مرزی

در ابتدای این فصل سوالی مطرح گردید مبنی بر اینکه آیا می توانیم با دانستن مقدار پتانسیل بر روی مرز، میدان جاذبه را در فضای خارجی تعیین کنیم بدون اینکه از ساختار چگالی داخل زمین اطلاع داشته باشیم؟ مثلا ماهواره ای را در نظر بگیرید که باید مدار آن تعیین گردد به منظور محاسبه نیروی جاذبه باید از میدان جاذبه در فضای خارجی اطلاع داشته باشیم. این مسئله یک مسئله مقدار مرزی است (BVP[6]). بطور کلی در حل اینگونه مسائل معمولاسعی می شود که تابعی را در فضای دامنه تعیین کنیم به صورتی که: الف) مقدار آن بر روی مرز مشخص باشد ب) رفتار آن در فضای دامنه توسط یک معادله دیفرانسیل جزئی مشخص شده باشد.

در مورد مسئله خودمان در مورد میدانهای جاذبه دو معادله دیفرانسیل متفاوت داریم : معادله پواسن که مربوط به درون و روی جسم جاذب می گردد و معادله لاپلاس که با فضای بیرونی جسم سروکار دارد. ما فقط به فضای بیرونی یعنی معادله لاپلاس می پردازیم. از دیدگاه کلاسیک سه نوع مسئله مقدار مرزی تعریف می گردد:

تابع Φ را در فضای خارجی تعیین کنید در حالیکه : $\Delta\Phi = 0$ و یکی از شرایط مرزی ذیل برقرار باشد:

مسئله مقدار مرزی اول	مسئله مقدار مرزی دوم	مسئله مقدار مرزی سوم
دیریکله[7]	**نیومان[8]**	**رابین (یا ترکیبی)[9]**
Φ در مرز مشخص است	$\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ در مرز مشخص است	$\Phi + c\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ در مرز مشخص است

به عنوان یک شرط دیگر باید یک رفتار منظم برای تابع داشته باشیم وبرای این منظور باید تابع در فاصله بینهایت به سمت صفر میل کند. به عبارت دیگر : $\lim_{r\to\infty}\Phi(r) = 0$ که این را نیز به عنوان یک شرط مرزی می توان در نظر گرفت و این در صورتی است که یک کره با شعاع بینهایت را به عنوان مرز دوم فرض کنیم. مثالهای ژئودتیکی از توابع مرزی عبارتند از : مقادیر ژئوپتانسیل (دیریکله)، نوسانات جاذبه (نیومان) و اناملی جاذبه (رابین). هرچند در زمینه های ژئودتیکی، مرز S خودش (یعنی ژئوئید) باید مجهول فرض گردد و با مسئله ای بنام مسئله مقدار مرزی ژئودتیک[10] روبرو خواهیم بود. مسئله دیگری هم هست که به آن مسئله شرایط مرزی **مخلوط**[11] گفته می شود. مثالی از آن در مسئله مقدار مرزی ثقل سنجی _ ارتفاع یابی ماهواره ای است که در آن از اطلاعات مرزی مخلوط استفاده می شود : ژئوئید (دیریکله) در مناطق اقیانوسی و اناملی جاذبه (رابین) در مناطق خشکی

---

[6] Boundary Value Problem
[7] Dirichlet BVP
[8] Neumann BVP
[9] Robin BVP
[10] geodetic BVP
[11] mixed BVP

۳. ۴. توابع هارمونیک

تابعی مانند Φ که در فضای دامنه در معادله دیفرانسیل لاپلاس صدق کند را تابع هارمونیک می نامند: $\Delta\Phi = \nabla^2\Phi = 0$ دقت کنید که گاهی از ∇^2 به جای Δ استفاده می کنند. برای مثال همانگونه که دیدیم پتانسیل جاذبه در فضای خارج از جسم یک تابع هارمونیک است. خصوصیات توابع هارمونیک به شرح ذیل می باشد:

۱- تابعی مانند Φ که در معادله لاپلاس در یک حجم بسته صدق می کند و یکی از شرایط مرزی زیر را در یک مرز بسته ارضا می کند، **یکتاست**[۱۲]:

الف) مقدار تابع (Φ) بر روی کل مرز معلوم باشد (شرط دیریکله).

ب) مقدار مشتق نرمال تابع: $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ بر روی کل مرز معلوم باشد (شرط نیومان).

ج) تابع (Φ) بر روی بخشی از مرز معلوم باشد و $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ بر روی بقیه مرز معلوم باشد (مسئله مخلوط).

۲- اگر تابع Φ در منطقه V که توسط سطح S محدود گردیده است ، هارمونیک باشد آنگاه Φ نمی تواند مقادیر ماکزیمم و می نیمم خود را درون منطقه V داشته باشد بلکه **مقادیر اکسترمم** فقط بر روی سطح مرزی اتفاق می افتند.

۳- **اصل برهم نهی**[۱۳] در مورد توابع هارمونیک صدق می کند.

٤- تابع هارمونیک دارای **خاصیت معکوس کروی** است یعنی اگر $\Phi(\bar{r})$ یک تابع هارمونیک در داخل یا خارج کره ای به شعاع واحد باشد آنگاه تابع $\frac{1}{r}\Phi(\bar{R})$ که درآن $\bar{R} = \frac{\bar{r}}{r^2}$ است نیز یک تابع هارمونیک در داخل و یا خارج همان کره خواهد بود.

۵- مقدار تابع هارمونیک در مرکز یک کره برابر با میانگین مقادیر تابع روی سطح کره می باشد. برای مثال اگر کره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع R در نظر بگیریم، مقدار تابع $\Phi(\bar{r})$ در مرکز کره از رابطه زیر حساب می شود[۱٤]:

$$\Phi(\bar{0}) = \frac{1}{4\pi R^2}\oiint_S \Phi(\bar{r})dS \quad (۳-۲۲)$$

---

[۱۲] اثبات یکتائی (uniqueness theorem) با استفاده از اتحاد اول گرین صورت می گیرد که در فصل آخر به آن پرداخته شده است.

[13] superposition principle

[۱٤] اثبات در فصل آخر (مطالب تکمیلی)

۳. ۵. حل معادله دیفرانسیل جزئی لاپلاس

معادله دیفرانسیل لاپلاس در مسائل مختلفی نظیر الکترواستاتیک، هیدرودینامیک و تئوری جاذبه دارای کاربرد است. در ریاضیات برای حل این معادله روشهای مختلف و متفاوتی وجود دارد که مهمترین آنها عبارتند از : روش گرین[15]، تبدیل به معادله انتگرال فردهولم[16]، روشهای محاسبات عددی، تبدیلات لاپلاس، فوریه و تبدیلات دیگر و روش جداسازی متغییرها که به روش فوریه معروف است. در ژئودزی معمولا از سه روش تاکنون استفاده شده است که عبارتند از روشهای فوریه ، گرین و انتگرال فردهولم که دو روش آخر نیاز به دانستن مباحث پیشرفته در زمینه آنالیز تابعی دارند و از حوصله این جزوه خارج هستند. روش انتخابی ما روش فوریه و یا همان روش نام آشنای جداسازی متغییرهاست. برای حل معادله دیفرانسیل لاپلاس توسط این روش اولین و مهمترین مرحله انتخاب سیستم مختصات مناسب می باشد. در ریاضیات این گونه رایج است که معادله لاپلاس را در سه سیستم مختصات کارتزین، کروی و استوانه ای حل می کنند که حل این معادله در سیستم مختصات کروی منجر به معادله لژاندر و در سیستم مختصات استوانه ای منجر به معادله بسل خواهد شد. در ژئودزی با توجه به نوع کاربرد و ماهیت مسئله معمولا از سیستمهای مختصات کارتزین و کروی استفاده می شود که راه حل اول برای کاربردهای[17] مسطحاتی و منطقه ای مناسب است و راه حل دوم راه حل کاملتر و عمومی مسئله برای کل کره زمین است. سیستم مختصات دیگری نیز در ژئودزی مورد توجه می باشد و آن سیستم مختصات بیضوی است که اشاراتی به آن نیز خواهیم داشت.

۳. ۵. ۱. سیستم مختصات کارتزین

موقعیت مسطحاتی را فرض کنید که در آن x و y مختصات افقی هستند و z مولفه قائم باشد بطوریکه $z < 0$ به معنای داخل زمین و $z > 0$ فضای خارجی زمین باشد. هدف ما حل معادله : $\Delta\Phi(x,y,z) = 0$ به ازای $z > 0$ یعنی فضای خارج زمین است. اولین ترفند[18] جداسازی متغییرهاست:

$$\Phi = \Phi(x,y,z) = f(x)g(y)h(z) \quad (۳-۲۵)$$

که با قراردادن آن در معادله لاپلاس نتیجه ذیل عاید می گردد:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} g(y)h(z) + f(x)\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} h(z) + f(x)g(y)\frac{\partial^2 h(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (۳-۲۶)$$

با اختصار معادله فوق را به صورت مقابل می نویسیم : $f''gh + fg''h + fgh'' = 0$ که اگر آنرا در تابع $\Phi = fgh$ ضرب کنیم :

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{h''}{h} = 0 \quad (۳-۲۷)$$

اکنون فرضی را در نظر می گیریم : $\frac{f''}{f} = n'^2$ و $\frac{g''}{g} = m'^2$ و $\frac{h''}{h} = k'^2$ (۳-۲۸) که با جایگذاری در معادله فوق نتیجه می شود:

$$n'^2 + m'^2 + k'^2 = 0 \quad (۳-۲۹)$$

---

15 Green's method
16 Fredholm's linear integral equation
17 planar and regional applications
18 Strategy

از آنجائی که می خواهیم پتانسیل جاذبه را بدست بیاوریم و آن یک مقدار حقیقی دارد بنابراین قسمت کلیه مجذورها در رابطه (۳-۲۸) باید مقادیر حقیقی داشته باشند ولی رابطه (۳-۲۹) نشان می دهد که همگی آنها نمی توانند مقادیری حقیقی داشته باشند همانگونه که همگی نمی توانند مقادیر موهومی داشته باشند بطور کلی برای رابطه (۳-۲۹) چهار حالت ممکن است اتفاق بیافتد:

۱) دو تا حقیقی باشد و دیگری موهومی

۲) یکی حقیقی باشد و دوتا موهومی

۳) یکی حقیقی باشد، یکی موهومی و دیگری صفر

٤) هر سه صفر باشند

که منطقا از بین وضعیتهای ۱ و ۲ یکی را باید انتخاب کنیم. موهومی در نظر گرفتن هر یک از مقادیر n'^2، m'^2 یا k'^2 منجر به یک جواب بر حسب توابع مثلثاتی sin و cos برای معادله متناظر می گردد وحقیقی فرض کردن آنها جوابی به صورت تابع نمایی خواهد داشت. با توجه به فرض اول مسئله مقدار n'^2 و m'^2 را موهومی و مقدار k'^2 را حقیقی فرض می کنیم: (۳-۳۰) $n'^2 = -n^2$ و $m'^2 = -m^2$ و $k'^2 = n^2 + m^2$ (n و m اعدادی حقیقی هستند) با این فرض رابطه (۳-۲۹) برقرار خواهد بود. با جایگذاری مقادیر رابطه (۳-۳۰) در رابطه (۳-۲۸) سه معادله دیفرانسیل معمولی[19] (ODE) به فرم ذیل بدست می آید:

$$\frac{f''}{f} = -n^2 \Rightarrow f'' + n^2 f = 0$$

$$\frac{g''}{g} = -m^2 \Rightarrow g'' + m^2 g = 0 \qquad (۳-۳۱)$$

$$\frac{h''}{h} = n^2 + m^2 \Rightarrow h'' - (n^2 + m^2)h = 0$$

با این ترفند موفق شده ایم که یک معادله دیفرانسیل جزئی[20] (PDE) را به چند معادله دیفرانسیل معمولی تجزیه کنیم. حل این معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه ۲ ساده است، این معادلات در فیزیک به معادلات حرکت هارمونیک[21] موسوم می باشند. معادلات اول و دوم در (۳-۳۱) دارای جوابهای خصوصی زیر هستند :

$$f_2(x) = \sin nx \quad \text{و} \quad f_1(x) = \cos nx \qquad (۳-۳۲)$$

$$g_2(y) = \sin my \quad \text{و} \quad g_1(y) = \cos my$$

و جوابهای خصوصی معادله سوم برحسب تابع نمائی خواهد بود:

$$h_2(z) = e^{\sqrt{n^2+m^2}z} \quad \text{و} \quad h_1(z) = e^{-\sqrt{n^2+m^2}z} \qquad (۳-۳۳)$$

همانطور که می دانید جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) به صورت یک ترکیب خطی از جوابهای خصوصی آن ذکر می گردد. همین امر برای یک معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) هم صدق می کند، اما چگونه؟ با استفاده از روش جداسازی متغیرها معادله PDE به n معادله ODE تفکیک می گردد. اگر این معادلات ODE از نوع معادلات اشتورم _ لیوویل[22] باشند آنگاه حاصلضرب سیستمی از توابع ویژه آنها ، سیستمی از توابع ویژه (از متغیرهای مختلف) برای معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) خواهد بود. آنگاه حل مسئله مقدار

---

[19] Ordinary Differential Equation
[20] Partial Differential Equation
[21] equation of harmonic motion
[22] Sturm- Liouville type

مرزی به صورت یک ترکیب خطی از توابع ویژه ای بدست می آید که مقادیر مرزی را ارضا می کنند. معادلات دیفرانسیل از نوع اشتورم – لیوویل دارای شکل عمومی ذیل هستند:

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{du}{dx}\right]-Q(x)u(x)+\lambda\rho(x)u(x)=0 \quad (۳۴-۳)$$

که درآن $P(x)>0$ و $Q(x)\geq 0$ دو تابع معلوم و پیوسته می باشند و $P'(x)$ نیز یک تابع پیوسته است و $\rho(x)$ یک تابع همواره مثبت و مخالف صفر است که به آن تابع وزن گفته می شود و λ یک عدد حقیقی است. ثابت می شود که معادله دیفرانسیل فوق به ازای مقادیر مختلف $\lambda_i \geq 0$ دارای جوابهائی بصورت $u_i(x)$ می باشد. به λ_i ها مقادیر ویژه و به $u_i(x)$ ها که جوابهای متناظر با این مقادیر هستند توابع ویژه معادله دیفرانسیل اشتورم ـ لیوویل گفته می شود. نکته جالب و مهمی که در مورد توابع ویژه (و یا همان جوابهای) معادله اشتورم لیوویل وجود دارد اینست که این توابع متعامد هستند به عبارت دیگر ضرب داخلی[۲۴] آنها در دامنه تعریف برابر صفر است. اکنون به مسئله خود باز می گردیم، معادلات (۳-۳۱) همگی از نوع اشتورم ـ لیوویل هستند که در آنها $P(x)=1$ و $Q(x)=0$ وتابع وزن برابر واحد است $(\rho(x)=1)$. در اولین معادله $\lambda=n^2\geq 0$: $f''+n^2f=0$ توابع ویژه این معادله بصورت مقابل می باشند: $f_2(x)=\sin(nx)$ و $f_1(x)=\cos(nx)$ و $n=0,1,2,3,...$ است. جواب عمومی معادله دیفرانسیل لاپلاس در سیستم مختصات کارتزین $\Phi(x,y,z)$ به صورت حاصلضرب f، g و h می باشد. بنابراین ناگزیر هستیم که کلیه جوابها را برای ۸ حالت ممکن از ترکیبات را برای هر n و m در نظر بگیریم :

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(&a_{nm}\cos nx\cos my+b_{nm}\sin nx\sin my+\\ &c_{nm}\sin nx\cos my+d_{nm}\sin nx\sin my)\,e^{-\sqrt{n^2+m^2}z}+\\ &(e_{nm}\cos nx\cos my+f_{nm}\cos nx\sin my+\\ &g_{nm}\sin nx\cos my+h_{nm}\sin nx\sin my)\,e^{\sqrt{n^2+m^2}z}\end{aligned} \quad (۳۵-۳)$$

رابطه فوق جواب عمومی معادله دیفرانسیل لاپلاس در سیستم مختصات کارتزین سه بعدی است.

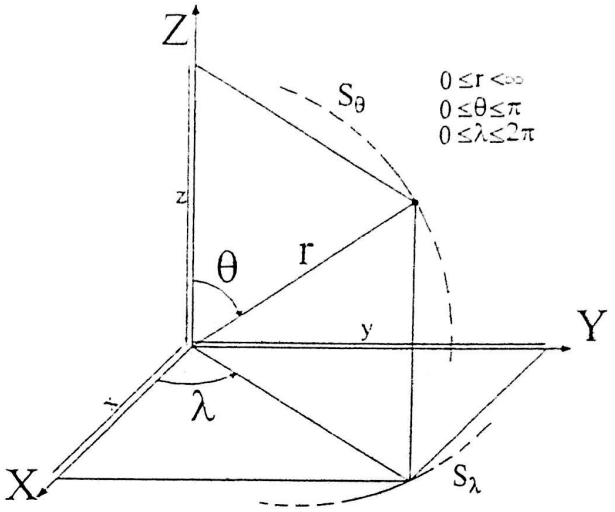
۳. ۵. ۲. سیستم مختصات کروی

در سیستم مختصات کروی (شکل ۳-۳)، همانطور که می دانید روابط ذیل برقرار است :

$$\begin{aligned}x&=r\sin(\theta)\cos(\lambda)\\ y&=r\sin(\theta)\sin(\lambda)\\ z&=r\cos(\theta)\end{aligned} \quad (۳۶-۳)$$

---

[۲۴] ضرب داخلی دو تابع حقیقی $u_i(x)$ و $u_j(x)$ تعریف شده بر روی فاصله $a\leq x\leq b$ بصورت $<u_i,u_j>=\int_a^b u_i(x)u_j(x)\rho(x)dx$ می باشد که در آن $\rho(x)$ تابع وزن است. در آنالیز تابعی اثبات می شود که هر تابع پیوسته را در فاصله دامنه می توان بصورت یک بسط سری از توابع متعامد نوشت که مثال بارز آن توابع متعامد مثلثاتی sin و cos در سری فوریه هستند که در ریاضیات مهندسی با آن آشنا شده اید.



شکل ۳-۳ : سیستم مختصات کروی

در هر سیستم مختصات منحنی الخط[24] سه بعدی با مولفه های (q_1, q_2, q_3) عملگر Δ یا ∇^2 به صورت ذیل تعریف می گردد:

$$\Delta_q = \nabla_q^2 = \frac{1}{\prod_{i=1}^{3} H_i} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\prod_{k=1}^{3} H_k}{H_j^2} \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \qquad (۳-۳۷)$$

در رابطه فوق (۳-۳۸) $H_i = \frac{ds_i}{dq_i}$ ضریب لامه[25] نام دارد و s_i طول در راستای خط مختصات q_i می باشد.

حال در سیستم مختصات کروی با استفاده از رابطه فوق ضرایب لامه را بدست می آوریم:

$$H_\theta = \frac{ds_\theta}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta s_\theta}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta\theta} = r$$

$$H_\lambda = \frac{ds_\lambda}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta s_\lambda}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{r\sin\theta\,\Delta\lambda}{\Delta\lambda} = r\sin\theta \qquad (۳-۳۹)$$

$$H_r = \frac{ds_r}{dr} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta s_r}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta r} = 1$$

براساس رابطه (۳-۳۷) عملگر لاپلاسین در سیستم مختصات کروی به صورت ذیل ظاهر خواهد شد:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{H_r H_\theta H_\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H_\theta H_\lambda}{H_r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{H_\lambda H_r}{H_\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{H_r H_\theta}{H_\lambda} \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \right) \right] \qquad (۳-۴۰)$$

باجایگذاری مقادیر از (۳-۳۹) در (۳-۴۰) معادله دیفرانسیل لاپلاس در سیستم مختصات کروی بدست می آید:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda^2} = 0 \qquad (۳-۴۱)$$

با ضرب r^2 در رابطه فوق به شکل ساده تری از معادله دیفرانسیل لاپلاس دست پیدا می کنیم

---

[24] Curve linear coordinate system
[25] Lame coefficient

$$\boxed{\Delta\Phi = r^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda^2} = 0} \quad (۴۳-۳)$$

حال قصد داریم که این معادله را به روش جداسازی متغیرها حل نمائیم، بنابراین :

$$\Phi(r,\theta,\lambda) = f(r).g(\theta).h(\lambda) \quad (۴۳-۳)$$

تابع $f(r)$ رفتار Φ را در جهت شعاعی در سیستم مختصات کروی توصیف می کند و حال آنکه توابع $g(\theta)$ و $h(\lambda)$ رفتار آنرا بر روی سطح تعیین می کنند و با توجه به این موضوع بهتر است یک تابع را به جای این دو به صورت $J(\theta,\lambda) = g(\theta).h(\lambda)$ در نظر بگیریم و $f(r)$ که از سنخ دیگری است جدای از آن دو خواهد بود:

$$\Phi(r,\theta,\lambda) = f(r).J(\theta,\lambda) \quad (۴۴-۳)$$

$$\Delta\Phi = r^2 f''J + 2rf'J + f\frac{\partial^2 J}{\partial\theta^2} + \cot\theta\, f\frac{\partial J}{\partial\theta} + \frac{f}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 J}{\partial\lambda^2} = 0 \quad (۴۵-۳)$$

که برای جداسازی متغیرها از یکدیگر رابطه فوق را در fJ ضرب می کنیم:

$$r^2\frac{f''}{f} + 2r\frac{f'}{f} + \frac{1}{J}\frac{\partial^2 J}{\partial\theta^2} + \frac{\cot\theta}{J}\frac{\partial J}{\partial\theta} + \frac{1}{J\sin^2\theta}\frac{\partial^2 J}{\partial\lambda^2} = 0 \quad (۴۶-۳)$$

معادله دیفرانسیل فوق که بخشی از آن تابعی از r و بخش دیگر تابعی از θ و λ است به دو معادله دیفرانسیل ذیل قابل تفکیک است :

$$\frac{1}{J}\frac{\partial^2 J}{\partial\theta^2} + \frac{\cot\theta}{J}\frac{\partial J}{\partial\theta} + \frac{1}{J\sin^2\theta}\frac{\partial^2 J}{\partial\lambda^2} = -n(n+1) \quad \text{و} \quad r^2\frac{f''}{f} + 2r\frac{f'}{f} = n(n+1)$$

شکل دیگر این دو معادله به این صورت می باشد: $\boxed{r^2 f'' + 2rf' - n(n+1)f = 0}$ (۴۷-۳) که به آن معادله دیفرانسیل اولر می گویند و یک معادله دیفرانسیل معمولی است و همچنین :

$$\boxed{\frac{\partial^2 J}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial J}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 J}{\partial\lambda^2} + n(n+1)J = 0} \quad (۴۸-۳)$$

معادله فوق خودش یک معادله دیفرانسیل جزئی می باشد که باید حل گردد. برای حل آن از جداسازی متغیرها استفاده می کنیم: $J(\theta,\lambda) = g(\theta)h(\lambda)$ و نتیجه اینکه :

$$g''h + \cot\theta g'h + \frac{1}{\sin^2\theta}gh'' + n(n+1)gh = 0 \quad (۴۹-۳)$$

به منظور تفکیک متغیرها رابطه فوق را در عبارت $\frac{\sin^2\theta}{gh}$ ضرب می کنیم:

$$\boxed{\sin^2\theta\frac{g''}{g} + \sin\theta\cos\theta\frac{g'}{g} + \sin^2\theta\, n(n+1) + \frac{h''}{h} = 0} \quad (۵۰-۳)$$

که با فرض $\frac{h''}{h} = -m^2$ و $\sin^2\theta\frac{g''}{g} + \sin\theta\cos\theta\frac{g'}{g} + \sin^2\theta\, n(n+1) = m^2$ معادله دیفرانسیل جزئی فوق به دو معادله دیفرانسیل معمولی تجزیه می گردد:

$$h'' + m^2 h = 0 \quad (۵۱-۳)$$

و

$$\sin^2\theta\, g'' + \sin\theta\cos\theta\, g' + \left(\sin^2\theta\, n(n+1) - m^2\right)g = 0 \quad (۵۲-۳)$$

معادله فوق صورتی از معادله دیفرانسیل لژاندر وابسته[26] است که با تغییر متغیر $t = \cos(\theta)$ حاصل می گردد:

---

[26] Associated Legendre differential equation

$t = t(\theta)$ و $g = g(t)$ که بنابر قاعده زنجیره ای . $\frac{dg}{d\theta} = \frac{dg}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \frac{dg}{dt}(-\sin\theta)$ و همچنین :

$$\frac{d^2g}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dg}{dt}\frac{dt}{d\theta}\right) = \frac{d^2g}{d\theta\, dt}\cdot\frac{dt}{d\theta} + \frac{d^2t}{d\theta^2}\cdot\frac{dg}{dt} = \left(\frac{d^2g}{dt^2}\right)\cdot\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 + \frac{d^2t}{d\theta^2}\cdot\frac{dg}{dt}$$

پس نتیجه می شود : $\frac{d^2g}{d\theta^2} = \sin^2\theta\frac{d^2g}{dt^2} - \cos\theta\frac{dg}{dt}$ و در نتیجه معادله (۳-۵۲) را به صورت ذیل خواهیم داشت :

$$(1-t^2)g'' - 2tg' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right)g = 0 \qquad (۳-۵۳)$$

که در آن $g' = \frac{dg}{dt}$ و $g'' = \frac{d^2g}{dt^2}$ می باشد و همانطور که احتمالا از درس معادلات دیفرانسیل به خاطر دارید معادله فوق همان صورت معروف معادله لژاندر وابسته می باشد. معادله (۳-۵۳) از نوع معادلات اشتروم لیوویل نیز می باشد و فقط به ازای مقادیری از m جواب خواهد داشت که در معادله (۳-۵۱) جواب داشته باشند به عبارت دیگر فقط به ازای مقادیر ویژه (۳-۵۱) جواب دارد. این معادله دارای دو جواب خصوصی است که عبارتند از:

$$g_2(t) = Q_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2}\frac{d^mQ_n(t)}{dt^m} \quad \text{و} \quad g_1(t) = P_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2}\frac{d^mP_n(t)}{dt^m} \qquad (۳-۵۴)$$

$P_{nm}(t)$ و $Q_{nm}(t)$ توابع لژاندر وابسته نوع اول و نوع دوم نام دارند و همانطور که در رابطه فوق ملاحظه می گردد، برای تعیین این دو تابع نیاز به معلوم بودن توابع لژاندر معمولی نوع اول و دوم یعنی $P_n(t)$ و $Q_n(t)$ داریم که این دو تابع از روابط ذیل محاسبه می شوند:

$$Q_n(t) = \frac{2n-1}{n}tQ_{n-1}(t) - \frac{n-1}{n}Q_{n-2}(t) \quad (۳-۵۶) \quad \text{و} \quad P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n \qquad (۳-۵۵)$$

البته برای محاسبه این توابع روابط دیگری نیز وجود دارند که ما در اینجا رابطه صریح[27] محاسبه $P_n(t)$ و رابطه بازگشتی[28] محاسبه $Q_n(t)$ را ذکر نموده ایم. رابطه (۳-۵۶) به ازای اعداد صحیح $n \geq 2$ صدق می کند و مقادیر $Q_0(t)$ و $Q_1(t)$ از رابطه مقابل محاسبه می شوند: $Q_0(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$ و $Q_1(t) = \frac{t}{2}\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$

در قطبین زمین جائیکه $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ است مقدار $t = \cos(\theta) = \pm 1$ می باشد و در این نواحی توابع لژاندر وابسته نوع دوم تعریف نشده اند به همین دلیل جواب خصوصی $g_2(t) = Q_{nm}(t)$ را از معادله دیفرانسیل (۳-۵۳) نمی توانیم بپذیریم و فقط جواب $g_1(t) = P_{nm}(t)$ برای ما قابل قبول خواهد بود. همانطور که در بخش قبلی نیز دیدیم جوابهای خصوصی معادله دیفرانسیل معمولی (۳-۵۱) به صورت $h_1(\lambda) = \cos(m\lambda)$ و $h_2(\lambda) = \sin(m\lambda)$ می باشند و جواب عمومی معادله دیفرانسیل جزئی (۳-۴۸) یک ترکیب خطی از حاصلضرب جوابهای خصوصی معادلات (۳-۵۱) و (۳-۵۲) خواهد بود:

$$\boxed{J(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(C_{nm}\cos(m\lambda) + S_{nm}\sin(m\lambda)\right)P_{mn}(\cos\theta)} \qquad (۳-۵۷)$$

در رابطه (۳-۵۷) C_{nm} و S_{nm} یک سری ضرایب ثابت می باشند که مقادیر آنها با استفاده از شرایط مرزی تعیین می گردد.

---

[27] implicit
[28] recursive

اکنون به رابطه (۳-٤٤) باز می گردیم :

$$\Phi(r,\theta,\lambda) = f(r)J(\theta,\lambda) = f(r)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(C_{nm}\cos(m\lambda) + S_{nm}\sin(m\lambda)\right)P_{nm}(\cos\theta) \quad (۳-۵۸)$$

برای یافتن $f(r)$، معادله اولر (۳-٤۷) را با تغییر متغییر $t = \ln(r)$ حل می کنیم و این معادله به صورت ذیل تبدیل می شود:

$$f'' + f' - n(n+1)f = 0 \quad (۳-۵۹)$$

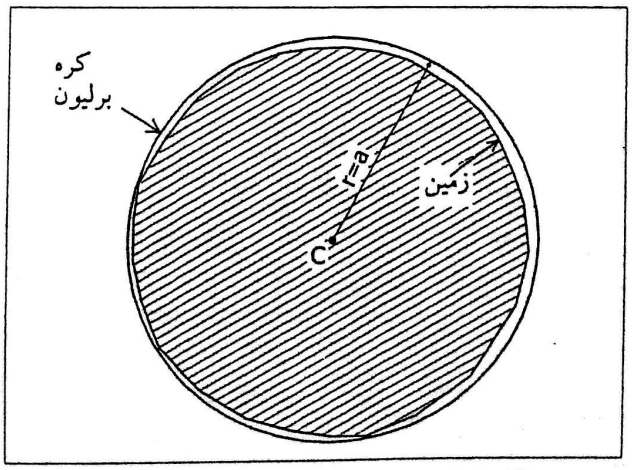
معادله فوق از نوع معادلات دیفرانسیل معمولیست که دارای جوابهائی به صورت : $f_1(r) = e^{nt} = r^n$ و $f_2(r) = e^{-(n+1)t} = r^{-(n+1)}$ می باشد و همانطور که جلوتر خواهیم داد تحت شرایط مرزی مختلف تنها یکی از این جوابهای خصوصی را می توانیم بپذیریم.

۳. ۵. ۳. شرط دیریکله

پیش از پرداختن به مسئله مقدار مرزی دیریکله باید یک شرط عمومی را در مورد تابع تحلیلی بررسی کنیم و آن اینست : $\lim_{r\to\infty}\Phi(r,\theta,\lambda) = 0$ به عبارت دیگر در فاصله بینهایت حد تابع تحلیلی Φ باید به سمت صفر میل کند: $\lim_{r\to\infty}\Phi(r,\theta,\lambda) = \lim_{r\to\infty} f(r)J(\theta,\lambda) = 0$ این شرط هنگامی برقرار می گردد که $\lim_{r\to\infty} f(r) = 0$ و این خود معیاری برای انتخاب یکی از جوابهای خصوصی معادله (۳- ۵۹) است و به این دلیل که : $\lim_{r\to\infty} r^{-(n+1)} = 0$ و $\lim_{r\to\infty} r^n = \infty$ طبیعیست که جواب خصوصی $f(r) = r^{-(n+1)}$ را بپذیریم :

$$\Phi(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(C_{nm}\cos(m\lambda) + S_{nm}\sin(m\lambda)\right)P_{nm}(\cos\theta)\, r^{-(n+1)} \quad (۳-۶۰)$$

در مسئله مقدار مرزی اول یعنی دیریکله همانطور که در بخش ۳. ۳ گفته شد مقدار تابع Φ بر روی کل مرز مشخص می باشد و بنابراین باید در ابتدا یک تابع مرزی در نظر بگیریم و سپس شرط دیریکله را بررسی کنیم. تابع مرزی خود را یک کره به شعاع a به گونه ای در نظر می گیریم که کل جسم مورد نظر یعنی زمین را بر بگیرد. به این کره اصطلاحا کره برلیون[۲۹] گفته می شود. کره برلیون با شعاع می نیمم زمین را در بر گرفته است و حداکثر در یک نقطه می تواند بر زمین مماس هم باشد (شکل ۳-٤).



شکل ۳-٤: کره برلیون به عنوان تابع مرزی دیریکله

[29] Brillouin sphere

مقدار تابع Φ بر روی سطح کره معلوم است بنابراین با قرار دادن $r = a$ در رابطه (۳-۶۰):

$$\Phi(r = a, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\left(C_{nm}\cos(m\lambda) + S_{nm}\sin(m\lambda)\right)P_{nm}(\cos\theta)\right]a^{-(n+1)} \quad (۳-۶۰)$$

حال یک فرض جدید در نظر می گیریم:

$$C_{nm}a^{-(n+1)} = A_{nm} \quad \text{و} \quad S_{nm}a^{-(n+1)} = B_{nm} \quad \text{که در این صورت:} \quad (۳-۶۱)$$

$$\Phi(r = a, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\left(A_{nm}\cos(m\lambda) + B_{nm}\sin(m\lambda)\right)P_{nm}(\cos\theta)\right] \quad (۳-۶۲)$$

رابطه فوق فقط برای روی کره برلیون $(r = a)$ اعتبار دارد و با استفاده از رابطه فوق با معلوم بودن مقادیر Φ بر روی مرز (سطح کره برلیون) می توان ضرایب A_{nm} و B_{nm} را تعیین نمود و مرتبه ودرجه تعیین یعنی n و m به تعداد مقادیر معلوم برروی کره بستگی دارد به عبارت دیگر هر چقدر اطلاعات بیشتری از مقادیر Φ بر روی سطح کره داشته باشیم مراتب و درجات بیشتری از A_{nm} و B_{nm} قابل محاسبه خواهد بود و البته باید پراکندگی اطلاعات بر روی سطح کره به صورت یکنواخت باشد. سوالی که اکنون پیش می آید اینست که تکلیف نقاط داخل و خارج کره (سطح مرزی) چه خواهد شد؟ ابتدا راجع به نقاط خارج کره بحث می کنیم. برای این نقاط $a < r < \infty$ و با قرار دادن شرط $\lim_{r\to\infty}\Phi(r,\theta,\lambda) = 0$ مقدار تابع Φ از رابطه ذیل محاسبه می گردد:

$$\Phi(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(C_{nm}\cos(m\lambda) + S_{nm}\sin(m\lambda)\right)P_{nm}(\cos\theta)\, r^{-(n+1)}$$

که همان رابطه (۳-۶۰) می باشد، حال اگر با در نظر گرفتن شرط مرزی دیریکله مقادیر : $C_{nm} = A_{nm}a^{(n+1)}$ و $S_{nm} = B_{nm}a^{(n+1)}$ را از (۳-۶۱) در رابطه فوق قرار دهیم :

$$\boxed{\Phi(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(A_{nm}\cos(m\lambda) + B_{nm}\sin(m\lambda)\right)P_{nm}(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}} \quad (۳-۶۳)$$

با استفاده از رابطه فوق می توان مقدار تابع Φ برای نقاط خارج و روی کره بدست آورد. این رابطه در واقع همان رابطه (۳-۶۰) است که با یک تغییر متغیر از r به $\frac{r}{a}$ حاصل شده است. دقت کنید که تابع $\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}$ هنگامی که $r \geq a$ باشد به ازای مقادیر مختلف n یک تابع همگراست زیرا که همواره $\frac{a}{r} \leq 1$ خواهد بود و بنابراین تابع $\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}$ حداکثر مقداری برابر با 1 خواهد داشت و با افزایش n مقدار آن کاهش پیدا می کند. برای نقاط داخل کره برلیون جائیکه $r \leq a$ تابع $\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}$ یک تابع واگراست که با افزایش n مقدار آن بزرگ و بزرگتر می شود زیرا که همواره $\frac{a}{r} \geq 1$ خواهد بود. در اینجا جواب خصوصی دوم از معادله دیفرانسیل اولر را می پذیریم $f(r) = r^n$ و با تغییر متغیر از r به $\frac{r}{a}$ برای نقاط درون کره برلیون مقدار تابع Φ بدست می آید:

$$\Phi(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(A_{nm}\cos(m\lambda) + B_{nm}\sin(m\lambda)\right)P_{nm}(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^{n} \quad (۳-۶۴)$$

و در اینجا ملاحظه می کنید که تابع $(r/a)^n$ به ازای $r \leq a$ برای نقاط درون کره برلیون با افزایش n یک تابع همگرا خواهد بود.

پیش از اتمام این مبحث لازم است تا با دو مفهوم مهم و جدید در ژئودزی فیزیک آشنا شویم :

$$\begin{cases} Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda) = \sin(m\lambda)P_{nm}(\cos\theta) \\ Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda) = \cos(m\lambda)P_{nm}(\cos\theta) \end{cases} \qquad (۶۵-۳)$$

به دو تابع فوق یعنی $Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda)$ و $Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda)$ هارمونیک های کروی[۳۰] (یا هماهنگ های کروی) سطحی گفته می شود زیرا که توابعی از (θ,λ) هستند و به r بستگی ندارند بنابراین بر روی سطح کره ای با شعاع دلخواه قابل تعریف هستند. حسن استفاده از این توابع در خلاصه نویسی فرمولهاست و البته در بخش بعدی خواهیم دید که برای این توابع رفتارهای ویژه ای بر روی سطح کره قابل تشخیص است که جالب توجه می باشد و به کمک این رفتارهاست که خواهیم توانست تابع پتانسیل را که خودش تابعی از هارمونیکهای کرویست، بهتر بشناسیم.

بطور کلی به عنوان جواب معادله دیفرانسیل لاپلاس در سیستم مختصات کروی با درنظر گرفتن شرط دیریکله به نتایج ذیل رسیده ایم :

$$\Phi(r,\theta,\lambda) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda) + B_{nm}Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\right] & r \geq a \\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda) + B_{nm}Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\right] & r \leq a \end{cases} \qquad (۶۶-۳)$$

برای پتانسیل جاذبه زمین که برای نقاط خارج از زمین با صرفنظر از چگالی اتمسفر یک تابع هارمونیک می باشد با در نظر گرفتن شرط مرزی دیریکله و مفاهیم ذکر شده در این بخش می توان رابطه (۳-۶۶) را عینا استفاده نمود:

$$W_g(r,\theta,\lambda) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda) + B_{nm}Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\right] & r \geq a \\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda) + B_{nm}Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\right] & r \leq a \end{cases} \qquad (۶۷-۳)$$

که در رابطه فوق ضرایب A_{nm} و B_{nm} خودشان از جنس تابع پتانسیل هستند و از نظر فیزیکی دارای واحد m^2s^{-2} می باشند و کمیتهائی دیمانسیون دار هستند و البته این رابطه معمولادر ژئودزی برای نقاط خارج از کره برلیون استفاده می شود و ناحیه درون کره برلیون از اهمیت به مراتب کمتری برخوردار است.

۳. ۶. خصوصیات توابع هارمونیک کروی

در این بخش قصد داریم از نظر ریاضی رفتار توابع هارمونیک کروی را بر روی سطح کره بررسی کنیم ابتدا این مبحث را با توابع لژاندر که تشکیل دهنده اساسی هارمونیکهای کروی هستند، شروع می کنیم. همانطور که دیدیم توابع لژاندر معمولی از رابطه $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ بدست می آیند که به فرمول ردریگوز[۳۱]

---

[30] spherical harmonics (surface)

[31] Rodrigues ریاضیدان و اقتصاد دان فرانسوی

شهرت دارد به مقادیر $P_n(t)$ که از رابطه فوق بدست می آید چند جمله ای های لژاندر[32] گفته می شود. چند جمله اول از توابع لژاندر معمولی که از فرمول رودریگوز محاسبه می شوند در جدول (۳-۱) ذکر گردیده اند

$P_0(t)=1$	$P_2(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}$	$P_4(t)=\frac{35}{8}t^4-\frac{15}{4}t^2+\frac{3}{8}$
$P_1(t)=t$	$P_3(t)=\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t$	$P_5(t)=\frac{63}{8}t^5-\frac{35}{4}t^3+\frac{15}{8}t$

جدول (۳-۱) : چند جمله ای های لژاندر از مرتبه ۰ تا ۵

و دقت کنید که $t=\cos\theta$ بنابراین $-1\le t\le 1$ دامنه توابع چند جمله لژاندر را تشکیل می دهد و برد آنها نیز فاصله $[-1,+1]$ می باشد. خصوصیت جالبی که در مورد توابع لژاندر وجود دارد اینست که $P_n(t)$ هر گاه n زوج باشد تابعی زوج و هرگاه n فرد باشد تابعی فرد است. شکل مثلثاتی توابع لژاندر با قراردادن $t=\cos\theta$ در مقادیر چند جمله ای لژاندر بدست می آید. خصوصیتی که در مورد توابع کسینوسی وجود دارد اینست که توانهای کسینوس زاویه ای مانند θ را می توان به صورت بسط بر حسب مضاربی از θ نوشت. برای مثال :

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2} \qquad ,\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

و بنابراین مقادیر چند جمله ای های لژاندر به صورت توابع مثلثاتی از $\cos\theta$ بدست می آید (جدول ۳-۲).

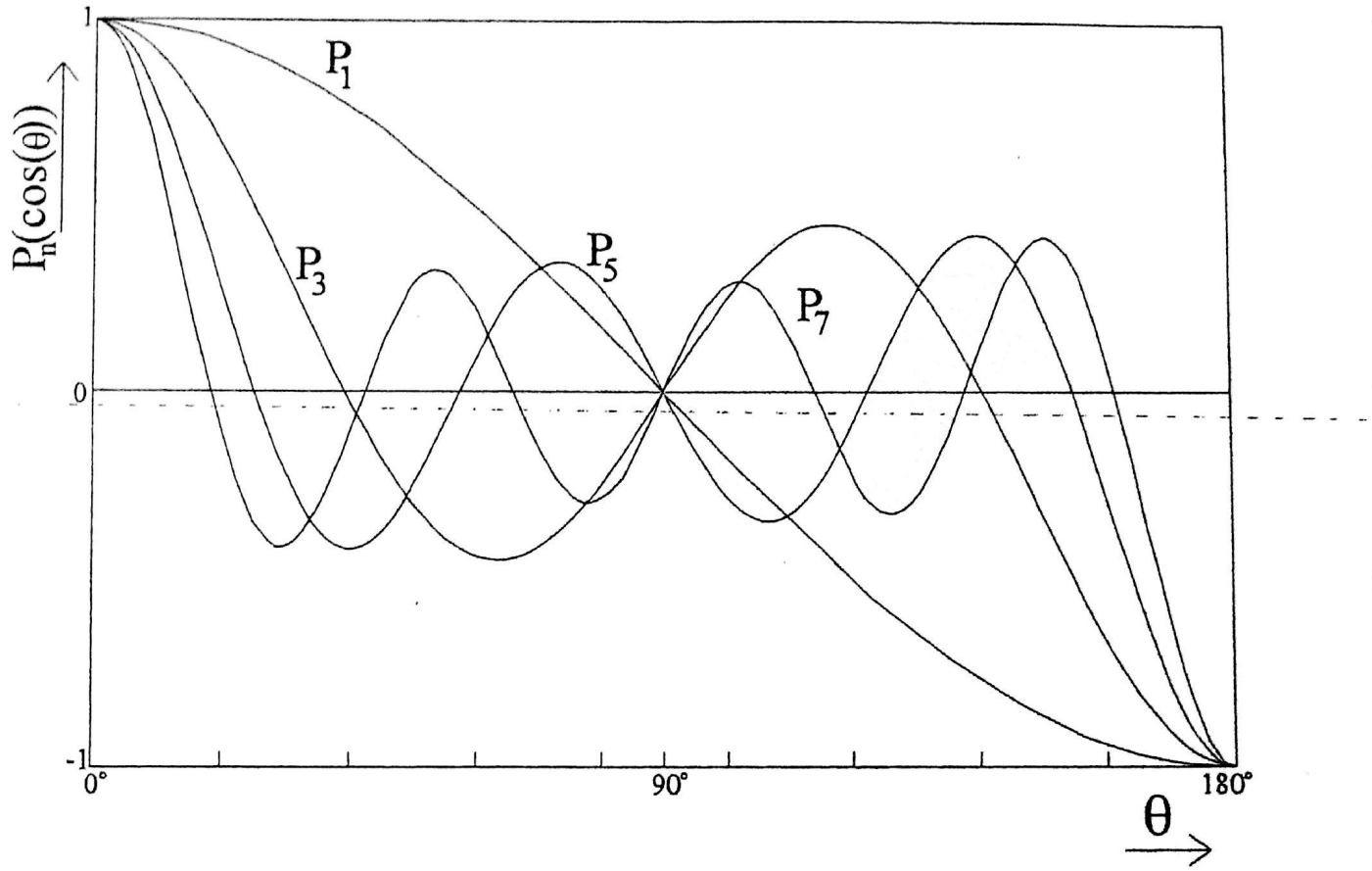
$P_0(\theta)=1$	$P_1(\theta)=\cos\theta$
$P_2(\theta)=\frac{3}{4}\cos 2\theta+\frac{1}{4}$	$P_3(\theta)=\frac{5}{8}\cos 3\theta+\frac{3}{8}\cos\theta$
$P_4(\theta)=\frac{35}{64}\cos 4\theta+\frac{5}{16}\cos 2\theta+\frac{9}{64}$	$P_5(\theta)=\frac{63}{128}\cos 5\theta+\frac{35}{128}\cos 3\theta+\frac{15}{64}\cos\theta$

جدول ۳-۲ : چند جمله ای های لژاندر به صورت سری مثلثاتی

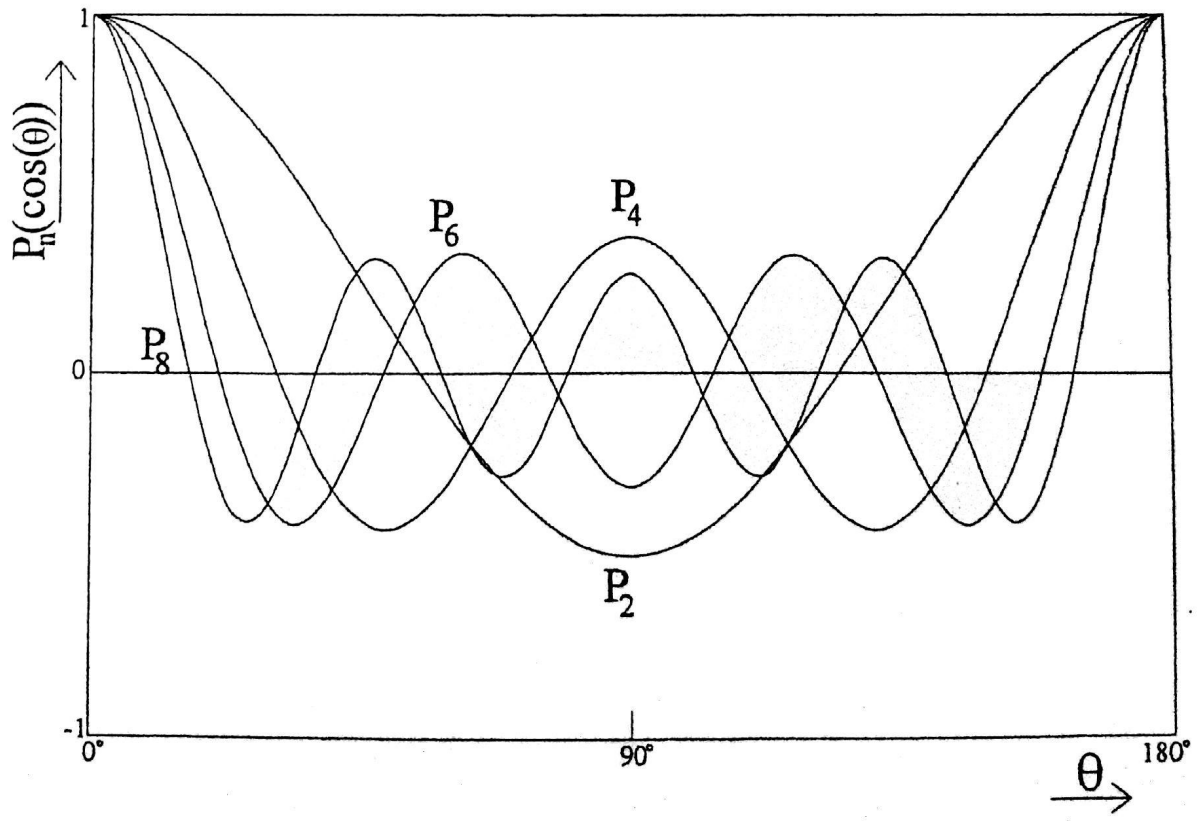
در شکلهای (۳-۵) و (۳-۶) رفتار توابع لژاندر در فاصله $0\le\theta\le\pi$ نمایش داده شده است.

---

[32] Legendre's polynomials



شکل (۳-۵) : رفتار توابع لژاندر فرد در فاصله $0 \le \theta \le \pi$



شکل (۳-۶) : رفتار توابع لژاندر زوج در فاصله $0 \le \theta \le \pi$

آنچه که در اشکال فوق مشهود است یکی خاصیت زوج و فرد بودن توابع است که قبلا هم گفته شد و دیگری تغییر علامت توابع به تعداد n مرتبه است و البته این ربطی به زوج و فرد بودن ندارد و برای هر یک از توابع

لژاندر $P_n(\theta)$ تعداد n بار تغییر علامت در فاصله $[0,\pi]$ مشاهده می گردد. مثلا تابع $P_2(\theta)$ در شکل فوق دو بار تغییر علامت داده است و تابع $P_5(\theta)$ در شکل (۳-۵) پنج بار تغییر علامت داده است برای تعیین چند جمله ای های لژاندر به غیر از رابطه ردریگوز روابط دیگری نیز وجود دارد که مهمترین آنها رابطه بازگشتی مقابل می باشد:

$$P_n(t) = -\frac{n-1}{n} P_{n-2}(t) + \frac{2n-1}{n} t P_{n-1}(t) \qquad (۳-۶۸)$$

فرمول فوق برای محاسبه توابع لژاندر توسط برنامه های کامپیوتری مناسب است و فرمول دیگری نیز وجود دارد که برای استفاده در برنامه های کامپیوتری مناسب است و آن به صورت سری می باشد:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} t^{n-2k} \qquad (۳-۶۹)$$

در رابطه فوق r بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $n/2$ است. بنابراین در حالتی که n زوج است: $r = n/2$ و در حالتی که n عدد فرد باشد $r = (n-1)/2$ خواهد بود. گذشته از همه این مطالب مهمترین خاصیتی که در مورد توابع لژاندر وجود دارد و مورد علاقه ما در ژئودزی فیزیک می باشد مسئله تعامد توابع لژاندر بر یکدیگر است. در پاورقی بخش ۳. ۵. ۱ ضرب داخلی[33] دو تابع را در فضای برداری توابع تعریف کردیم، بنابر این تعریف ضرب داخلی دو تابع لژاندر در یکدیگر به صورت ذیل خواهد بود:

$$< P_n(t), P_m(t) >= \int_{-1}^{+1} P_n(t) P_m(t) dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & n = m \end{cases} \qquad (۳-۷۰)$$

اثبات رابطه (۳-۷۰) را در فصل آخر (مطالب تکمیلی) می توانید ملاحظه کنید ولی آنچه که در اینجا برای ما مهم است مسئله تعامد توابع لژاندر بر یکدیگر است بنابر تعریف توابعی بر هم عمود هستند که ضرب داخلی آنها در یکدیگر برابر صفر باشد و در مورد توابع لژاندر همانطور که مشاهده می شود این مسئله صدق می کند. هر گاه $n = m$ باشد به مفهوم ضرب داخلی یک تابع در خودش است. به جذر ضرب داخلی یک تابع در خودش نرم تابع[34] (یا اندازه تابع) گفته می شود و آنرا با علامت $\| \ \|$ نشان می دهند:

$$< P_n(t), P_n(t) > = \|P_n(t)\|^2 = \int_{-1}^{+1} (P_n(t))^2 dt = \frac{2}{2n+1} \qquad (۳-۷۱)$$

در اینجا با یک مفهوم دیگر آشنا می شویم که دلتای کرونکر[35] نام دارد : $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ (۳-۷۲)

دلتای کرونکر ما را در ارائه بعضی از روابط به صورت فشرده یاری می دهد مثلا :

$$< P_n(t), P_m(t) >= \delta_{nm} \frac{2}{2n+1} \qquad (۳-۷۳)$$

اگر یک تابع جدید به صورت $\overline{P}_n(t) = \dfrac{P_n(t)}{\|P_n(t)\|}$ تعریف کنیم، آنگاه : $< \overline{P}_n(t), \overline{P}_m(t) >= \delta_{nm}$ و این بدان معنی است که $\|\overline{P}_n(t)\| = 1$ و به توابعی که نرم آنها برابر با یک باشد توابع نرمالیزه[36] می گوئیم. به توابع $\overline{P}_n(t)$

---

33 inner product
34 norm of function
35 kronecker's delta
36 normalized functions

توابع متعامد نرمالیزه لژاندر[37] گفته می شود. $\frac{1}{\|P_n(t)\|}=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$ را ضریب نرمالیزاسیون توابع چندجمله ای لژاندر می گویند زیرا که با ضرب این مقدار در توابع لژاندر نرم این توابع مساوی یک خواهد شد. پس ذکر این تعاریف نوبت به بررسی توابع لژاندر وابسته می رسد و همانطور که قبلا هم گفته شده است این توابع از رابطه ذیل محاسبه می شوند: $P_{nm}(t)=(1-t^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(t)}{dt^m}$ که به این رابطه، رابطه فرر[38] می گویند. البته این رابطه را به صورت $P_{nm}(t)=\frac{1}{2^n n!}(1-t^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}(t^2-1)^n$ (۷۴-۳) هم می توان نوشت و یک نتیجه ساده از این رابطه اینست که توابع چند جمله ای لژاندر حالت خاصی از توابع لژاندر وابسته هستند که در آن $m=0$ می باشد یعنی : $P_n(t)=P_{n0}(t)$ فرمول دیگری که برای محاسبه کامپیوتری توابع لژاندر وابسته مناسب است به صورت ذیل بیان می گردد :

$$P_{nm}(t)=\frac{(1-t^2)^{m/2}}{2^n}\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-m-2k)!}t^{n-m-2k} \qquad (۷۵-۳)$$

و همچنین رابطه بازگشتی ذیل را نیز می توان برای محاسبه توابع لژاندر وابسته بکار برد:

$$P_{nm}(t)=\begin{cases}\frac{2n-1}{n-m}tP_{n-1,m}(t)-\frac{n+m-1}{n-m}P_{n-2,m}(t) & n-2\geq m\\ \frac{2(m-1)}{\sqrt{1-t^2}}tP_{n,m-1}(t)-(n-m+2)(n+m-1)P_{n,m-2}(t) & m\geq 2\end{cases}$$

(۷۶-۳)

مقادیر اولیه توابع لژاندر وابسته تا درجه و مرتبه $(n,m)=(3,3)$ در جدول (۳-۳) نشان داده شده است.

n	m	$P_{nm}(t)$	$P_{nm}(\cos\theta)$	$\|P_{nm}(t)\|^2$
0	0	1	1	2
1	0	t	$\cos\theta$	$2/3$
1	1	$\sqrt{1-t^2}$	$\sin\theta$	$4/3$
2	0	$\frac{1}{2}(3t^2-1)$	$\frac{1}{4}(1+3\cos 2\theta)$	$2/5$
2	1	$3t\sqrt{1-t^2}$	$\frac{3}{2}\sin 2\theta$	$12/5$
2	2	$3(1-t^2)$	$\frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$	$48/5$
3	0	$\frac{1}{2}t(5t^2-3)$	$\frac{1}{8}(3\cos\theta+5\cos 3\theta)$	$2/7$
3	1	$\frac{3}{2}(5t^2-1)\sqrt{1-t^2}$	$\frac{3}{8}(\sin\theta+5\sin 3\theta)$	$24/7$
3	2	$15(1-t^2)t$	$\frac{15}{4}(\cos\theta-\cos 3\theta)$	$240/7$
3	3	$15(1-t^2)^{3/2}$	$\frac{15}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta)$	$1440/7$

جدول (۳-۳) : مقادیر اولیه توابع لژاندر وابسته تا درجه و مرتبه ۳

---

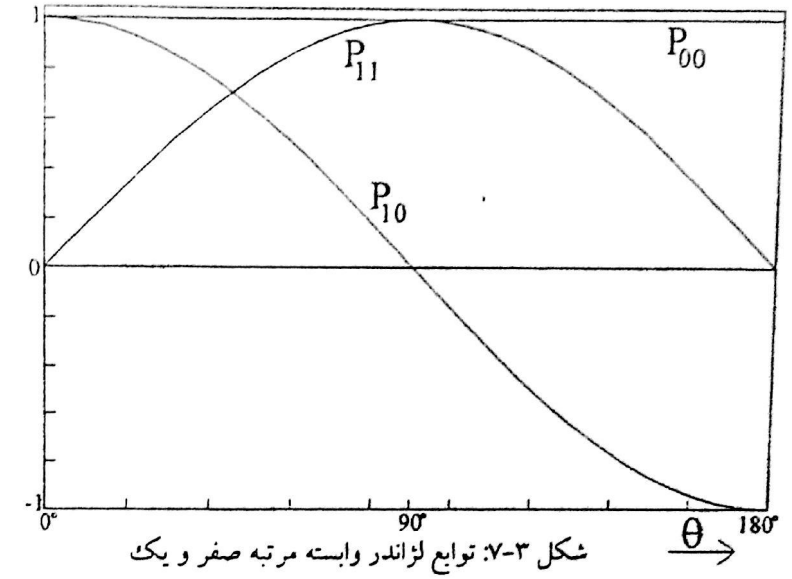
[37] orthogonal normalized Legendre's functions
[38] Ferrer's formula

خصوصیاتی که در مورد توابع لژاندر وابسته وجود دارند عبارتند از:

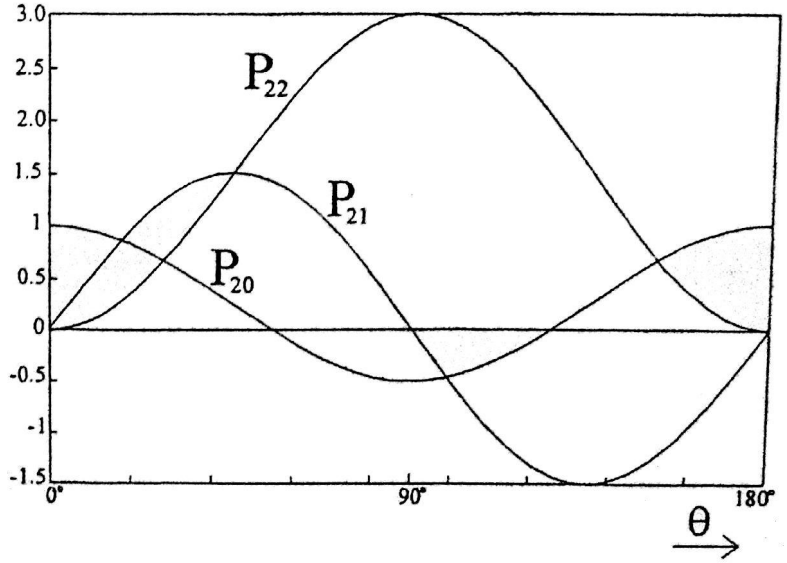
۱- توابع لژاندر وابسته هم زوج وفرد هستند و بسته به اینکه مقدار $n-m$ عدد زوج یا فرد باشد تابع لژاندر وابسته $P_{nm}(t)$ نیز زوج یا فرد خواهد بود به عبارت دیگر: $P_{nm}(-t) = (-1)^{n-m} P_{nm}(t)$

۲- مقدار توابع لژاندر وابسته فرد در استوا $(\theta = 90^\circ \rightarrow t = \cos\theta = 0)$ به دلیل صفر شدن t صفر است.

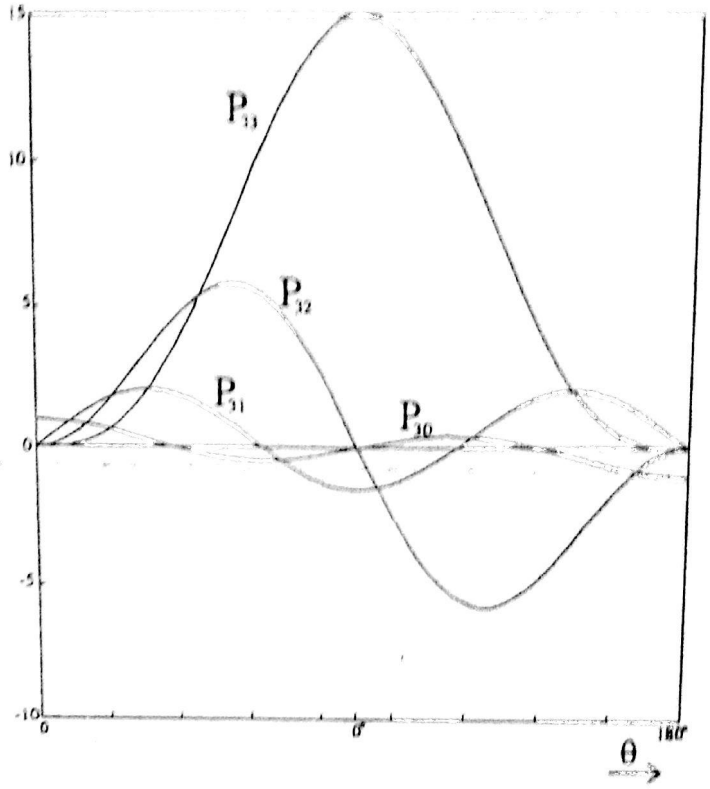
۳- هر تابع لژاندر وابسته به تعداد $n-m$ مرتبه در فاصله $t \in [-1,1]$ یا $\theta \in [0,\pi]$ (از یک قطب به قطب دیگر) تغییر علامت می دهد و یا بهتر است بگوئیم به تعداد $n-m$ بار مقدار صفر اختیار خواهد کرد (به شکلهای ۳-۷، ۳-۸ و ۳-۹ توجه کنید).



شکل ۳-۷: توابع لژاندر وابسته مرتبه صفر و یک



شکل (۳-۸) : توابع لژاندر وابسته مرتبه دوم



شکل (۳-۸) : توابع لژاندر وابسته مرتبه سوم

توابع لژاندر وابسته نیز همانند چند جمله ای ها متعامدند و ضرب داخلی آنها در همدیگر صفر می شود:

$$< P_{nm}(t), P_{lk}(t) >= \int_{-1}^{+1} P_{nm}(t) P_{lk}(t) dt = \begin{cases} 0 & n \neq l, l \neq k \\ 0 & m = k, n \neq l \\ 0 & m \neq k, n = l \\ \dfrac{2}{2n+1} \dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & m = k, n = l \end{cases}$$

(۳-۷۷)

و به طور خلاصه می توان گفت :

$$< P_{nm}(t), P_{lm}(t) >= \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,l} \qquad (۳-۷۸)$$

نرم توابع لژاندر وابسته به صورت مقابل تعریف می شود:

$$\| P_{nm}(t) \| = \sqrt{\frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} \qquad (۳-۷۹)$$

اکنون نوبت به توابع هارمونیک کروی می رسد:

$$Y_{nm}(\theta, \lambda) = \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases} P_{nm}(\cos\theta) \qquad (۳-۸۰)$$

$$< Y_{nm}(\theta, \lambda), Y_{lk}(\theta, \lambda) >= \iint_{\sigma} Y_{nm}(\theta, \lambda) \cdot Y_{lk}(\theta, \lambda) \, d\sigma =$$

$$\int_0^{\pi} P_{nm}(\cos\theta) \cdot P_{lk}(\cos\theta) \int_{-\pi}^{\pi} \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \cos k\lambda \\ \cos m\lambda \sin k\lambda \\ \sin m\lambda \cos k\lambda \\ \sin m\lambda \sin k\lambda \end{Bmatrix} d\lambda \sin\theta \, d\theta = 2\pi \left(1 + \delta_{m,0}\right) \frac{1}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,l} \delta_{m,k}$$

(۳-۸۱)

منظور از σ در رابطه فوق انتگرال بر روی سطح کره است و همانگونه که ملاحظه می کنید توابع هارمونیک کروی نیز متعامدند. با استفاده از رابطه فوق نرم توابع هارمونیک کروی به این صورت تعریف می شود:

$$< Y_{nm}(\theta,\lambda), Y_{nm}(\theta,\lambda) >= \|Y_{nm}(\theta,\lambda)\|^2 = \frac{2\pi(1+\delta_{m,0})}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \qquad (۸۲-۳)$$

شکل گسترده نتیجه بدست آمده از رابطه (۳-۸۱) را می توان به صورت زیر نیز نوشت :

$$< Y^C_{nm}(\theta,\lambda), Y^S_{lk}(\theta,\lambda) >= 0$$

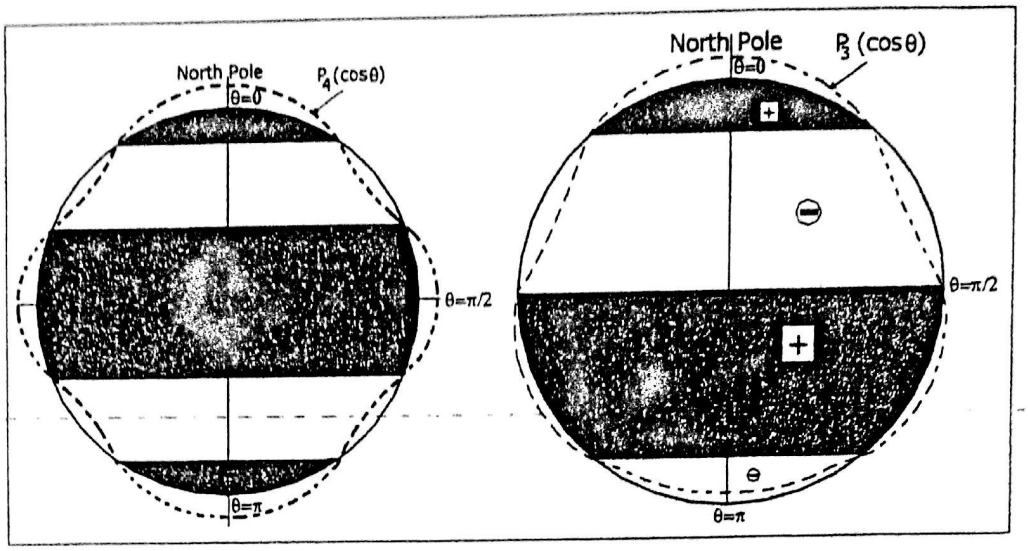
$$< Y^C_{nm}(\theta,\lambda), Y^C_{lk}(\theta,\lambda) > = < Y^S_{nm}(\theta,\lambda), Y^S_{lk}(\theta,\lambda) > = \begin{cases} 0 & n \neq l \text{ or } m \neq k \\ \dfrac{4\pi}{2n+1} & n = l, m = k = 0 \\ \dfrac{2\pi}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & n = l, m = k \neq 0 \end{cases}$$

به جدول (۳-٤) توجه کنید در این جدول توابع هارمونیک مرتبه پائین و نرم آنها نشان داده شده اند.

n	m	$Y^C_{nm}(\theta,\lambda)$	$Y^S_{nm}(\theta,\lambda)$	$\|Y_{nm}(\theta,\lambda)\|^2$
0	0	$P_0(\cos\theta)$	0	4π
1	0	$P_1(\cos\theta)$	0	$4\pi/3$
1	1	$P_{11}(\cos\theta)\cos\lambda$	$P_{11}(\cos\theta)\sin\lambda$	$4\pi/3$
2	0	$P_2(\cos\theta)$	0	$4\pi/5$
2	1	$P_{21}(\cos\theta)\cos\lambda$	$P_{21}(\cos\theta)\sin\lambda$	$12\pi/5$
2	2	$P_{22}(\cos\theta)\cos 2\lambda$	$P_{22}(\cos\theta)\sin 2\lambda$	$48\pi/5$

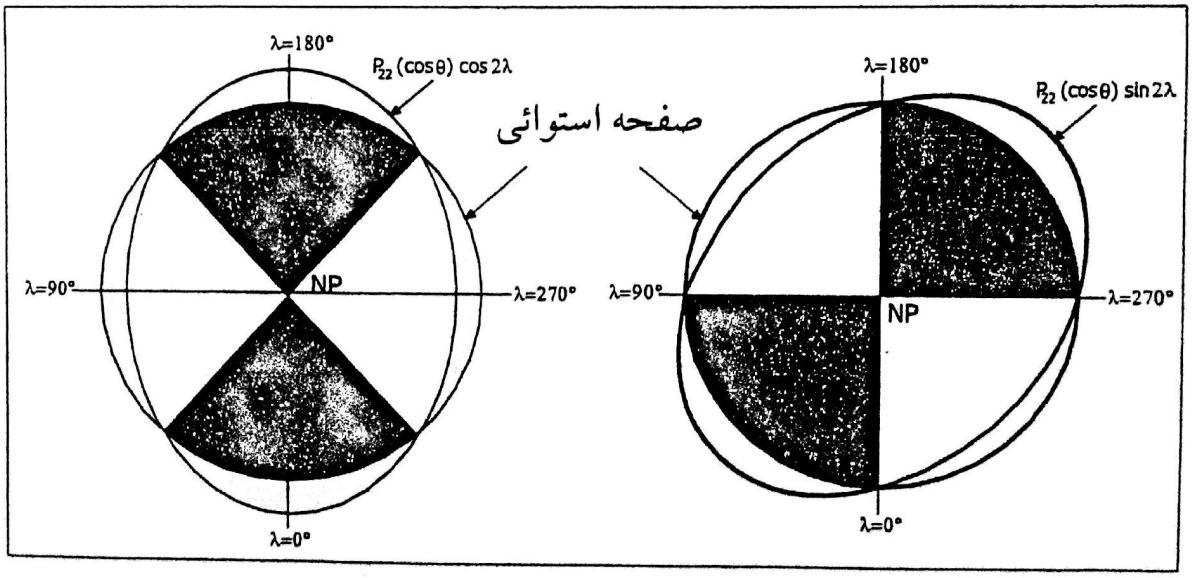
جدول (۳-٤) : مقادیر هارمونیکهای کروی مرتبه پائین

در جدول فوق ملاحظه می کنید که مقادیر هارمونیکهای سینوسی به ازای $m = 0$ همواره صفر است و همچنین به ازای $m = 0$ هارمونیکهای کسینوسی از جنس چند جمله ایهای لژاندر می باشند. بر روی سطح کره می توان رفتار خاصی را برای هارمونیکها تشخیص داد که این رفتار بستگی به درجه و مرتبه هارمونیک دارد. در موردی که مثال زده شد هنگامی که $m = 0$ باشد متغییر λ از عبارت هارمونیکها حذف می گردد و البته فقط هارمونیکهای کسینوسی داریم که رفتار توابع لژاندر معمولی را برروی سطح کره نشان می دهند. با تغییر θ از 0 تا π (از یک قطب تا قطب دیگر) تابع لژاندر مرتبه n همانطور که قبلا گفته شده است به تعداد n با تغییر علامت می دهد و اگر مکانهائی را که تابع هارمونیک مثبت است با رنگ مشکی و جاهائیکه منفی است را با رنگ سفید نشان دهیم سطح کره به منطقه هائی مداری شکل تقسیم می شود که به هرکدام یک zone گفته می شود و به هارمونیکهائی که در آنها $m = 0$ است هارمونیکهای zonal می گویند(به شکل ۳-۹ توجه کنید).



شکل (۳-۹) : توابع هارمونیک zonal که در آنها $m = 0$ می باشد.

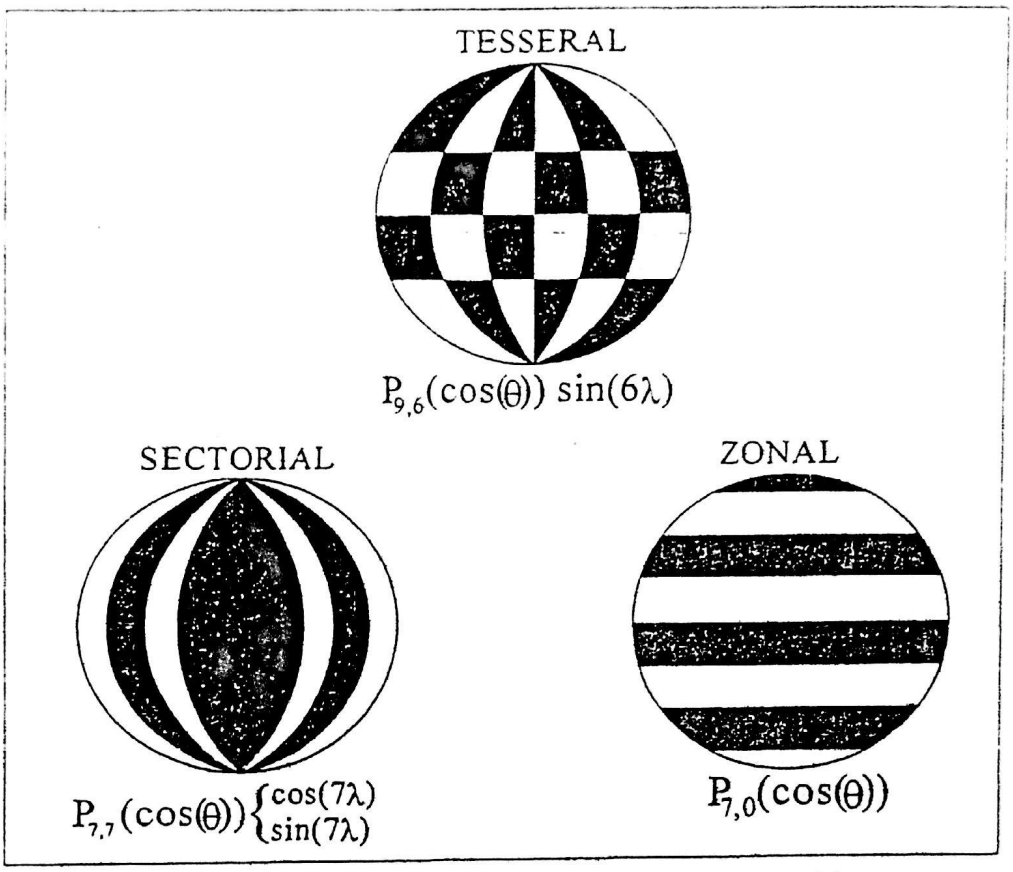
هارمونیکهائی که در آنها $n = m$ می باشد به صورت حاصلضرب تابع لژاندر وابسته $P_{nn}(\cos\theta)$ در توابع سینوس و کسینوس تعریف می شوند در مورد توابع لژاندر وابسته می دانیم که این توابع به تعداد $n - m$ مرتبه به ازای تغییرات θ از 0 تا π تغییر علامت می دهند و چون در اینجا $n = m$ است دیگر تغییر علامتی برای $P_{nn}(\cos\theta)$ نخواهیم داشت و مقدار آن همواره مثبت خواهد بود پس رفتار این هارمونیکها بر روی سطح کره مستقل از تغییرات θ خواهد بود و فقط به تغییرات λ مربوط می شود. به این نوع هارمونیکها که به صورت نصف النهاری تغییر می کنند، هارمونیکهای sectorial گفته می شود (به شکل ۳-۱۰ توجه کنید).



شکل (۳-۱۰) : توابع هارمونیک از نوع sectorial که در آنها $n = m$

نوع دیگر توابع هارمونیک هنگامی تشکیل می شود که $n \neq m \neq 0$ می دانیم که توابع لژاندر وابسته به تعداد $n - m$ مرتبه در فاصله $0 \leq \theta \leq \pi$ تغییر علامت می دهند و توابع $\cos m\lambda$ و $\sin m\lambda$ در فاصله

$0 \le \lambda \le 2\pi$ به تعداد $2m$ مرتبه مقدارشان صفر می شود بنابراین از حاصلضرب این توابع در یکدیگر سطح کره به قطعاتی تقسیم می گردد که یک در میان مثبت و منفی هستند، چیزی شبیه به صفحه شطرنج که به آنها هارمونیکهای شطرنجی یا tesseral گفته می شود. در شکل (۳-۱۱) انواع هارمونیکها،از جمله نوع tesseral نمایش داده شده اند.



شکل (۳-۱۱) : نمایش رفتار انواع هارمونیکها بر روی سطح کره

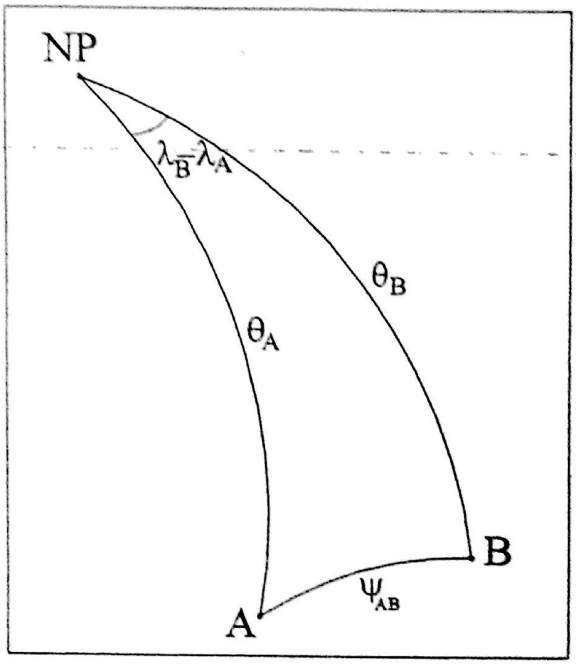
در جدول نمایش داده شده در شکل ذیل (۳-۱۲) تفکیک انواع توابع هارمونیک را بر حسب درجه و مرتبه آنها به صورتی دیگر ملاحظه می کنید.

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	$Y^c_{00}(\theta,\lambda)$					
1	$Y^c_{10}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{11}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{11}(\theta,\lambda)$				
2	$Y^c_{20}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{21}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{21}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{22}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{22}(\theta,\lambda)$			
3	$Y^c_{30}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{31}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{31}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{32}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{32}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{33}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{33}(\theta,\lambda)$		
4	$Y^c_{40}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{41}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{41}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{42}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{42}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{43}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{43}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{44}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{44}(\theta,\lambda)$	
5	$Y^c_{50}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{51}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{51}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{52}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{52}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{53}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{53}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{54}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{54}(\theta,\lambda)$	$Y^c_{55}(\theta,\lambda)$ $Y^s_{55}(\theta,\lambda)$

Zonal Harmonics — Tesseral Harmonics — Sectorial Harmonics

شکل ۳-۱۲

نکته مهم دیگری که در ارتباط با توابع هارمونیک کروی وجود دارد و در ژئودزی فیزیک برای ما اهمیت زیادی خواهد داشت **قضیه تجزیه لژاندر**[39] است. به شکل (۳-۱۳) توجه کنید در این شکل دو نقطه دلخواه A و B روی سطح کره قرار دارند که فاصله بین این دو، کمان ψ_{AB} بر روی سطح کره است به ψ اصطلاحا فاصله کروی[40] می گویند موقعیت دو نقطه A و B بر روی سطح کره در سیستم مختصات منحنی الخط کروی با (θ_A, λ_A) و (θ_B, λ_B) نمایش داده شده است.



شکل (۳-۱۳) : فاصله کروی ψ بین دو نقطه دلخواه A و B بر روی سطح کره

قضیه تجزیه لژاندر می گوید می توان فاصله کروی ψ را با استفاده از توابع لژاندر به صورت حاصلضرب مختصات نقاط A و B تجزیه کرد :

$$P_n(\cos\psi_{AB}) = P_n(\cos\theta_A)P_n(\cos\theta_B) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\left[Y_{nm}^C(\theta_A,\lambda_A)Y_{nm}^C(\theta_B,\lambda_B) + Y_{nm}^S(\theta_A,\lambda_A)Y_{nm}^S(\theta_B,\lambda_B)\right] \quad (۸۳-۳)$$

که البته رابطه فوق را با استفاده از دلتای کرونکر می توان خلاصه تر هم نوشت :

$$\boxed{P_n(\cos\psi_{AB}) = 2\sum_{m=0}^{n}\frac{(n-m)!}{(1+\delta_{m,0})(n+m)!}\left[Y_{nm}^C(\theta_A,\lambda_A)Y_{nm}^C(\theta_B,\lambda_B) + Y_{nm}^S(\theta_A,\lambda_A)Y_{nm}^S(\theta_B,\lambda_B)\right]}$$

(۸٤-۳)

وشکل دیگر آن می تواند به صورت ذیل باشد:

$$P_n(\cos\psi_{AB}) = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=0}^{n}\left[\bar{Y}_{nm}^C(\theta_A,\lambda_A)Y_{nm}^C(\theta_B,\lambda_B) + \bar{Y}_{nm}^S(\theta_A,\lambda_A)Y_{nm}^S(\theta_B,\lambda_B)\right] \quad (۸۵-۳)$$

به قضیه فوق قضیه متمم هارمونیکهای کروی هم گفته اند. با قرار دادن $n=1$ در رابطه (۳-۸۳) قضیه کسینوسها بر روی مثلث کروی در شکل (۳-۱۳) بدست می آید:

$$\cos(\psi_{AB}) = \cos\theta_A\cos\theta_B + \sin\theta_A\sin\theta_B\cos(\lambda_B - \lambda_A) \quad (۸٦-۳)$$

---

[39] Legendre decomposition formula
[40] spherical distance

۳. ۷. ضرایب هارمونیک کروی

در این بخش قصد داریم راجع به نحوه محاسبه ضرایب هارمونیک کروی بحث کنیم. برای محاسبه تابع پتانسیل جاذبه تاکنون دو رابطه بدست آورده ایم که یکی در فصل ۲ و دیگری در این فصل می باشد:

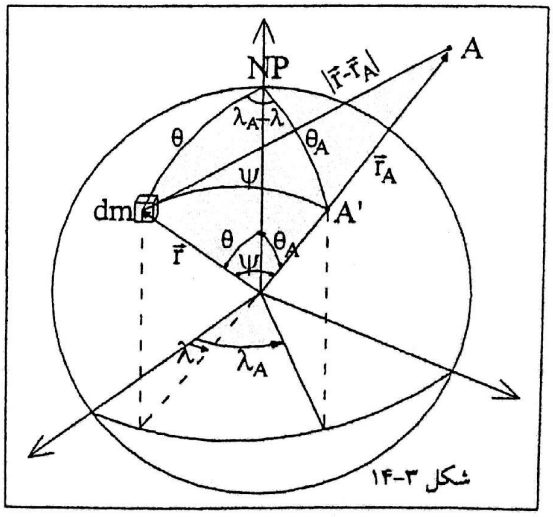
$$W_g(\bar{\mathbf{r}}) = G\iiint_{\mathcal{B}} \frac{\rho(\bar{\mathbf{r}}')}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|}\, d\mathcal{B} \qquad \text{و} \qquad (۸۷-۳)$$

$$W_g(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda) + B_{nm}Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\right] \qquad (۸۸-۳)$$

در رابطه دوم ما فقط موفق شده ایم که یک تابع مجهول را که همان تابع چگالی جسم $\rho(\bar{\mathbf{r}}')$ می باشد را با یک سری از ضرایب مجهول A_{nm} و B_{nm} تعویض کنیم. در واقع، ما لااقل یک گام به جلو برداشته ایم زیرا که اکنون به جای اینکه وابسته به داشتن اطلاعات از نحوه توزیع جرم در درون زمین باشیم قادر هستیم ضرایب مجهول را با استفاده از اطلاعاتی بر روی زمین و یا در بالای آن تعیین کنیم. اگر مقدار پتانسیل جاذبه بر روی مرز کره برلیون $(r = a)$ معلوم باشد، به عبارت دیگر: $V(\theta,\lambda) = W_g(a,\theta,\lambda)$ معلوم باشد آنگاه ضرایب پتانسیل A_{nm} و B_{nm} را می توان با عبور از یک فرایند استاندارد که همانا بسط تابع $V(\theta,\lambda)$ به سری هارمونیکهای کرویست بدست آورد. معادلاتی که برای ضرایب پتانسیل نوشته می شوند را در اینجا ارائه می کنیم. اگر از هارمونیکهای کروی نرمالیزه استفاده کنیم این ضرایب از روابط ساده ذیل حساب می شوند:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{nm} &= \oiint_{\delta} V(\theta,\lambda)\,\bar{Y}_{nm}^{C}(\theta,\lambda)\, d\omega \\ \bar{B}_{nm} &= \oiint_{\delta} V(\theta,\lambda)\,\bar{Y}_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\, d\omega \end{aligned} \qquad (۸۹-۳)$$

منظور از δ در رابطه فوق سطح کره برلیون است. در واقع از رابطه فوق ضرایب نرمالیزه از هارمونیکهای نرمالیزه بدست آمده اند. از آنجائیکه یک رابطه ضمنی بین چگالی ρ و ضرایب پتانسیل A_{nm} و B_{nm} وجود دارد، وسوسه می شویم که نگاه نزدیکتری به رابطه (۳-۸۸) داشته باشیم. برای مثال آیا داشتن اطلاعاتی راجع به ضرایب پتانسیل می تواند به ما اطلاعاتی راجع به توزیع جرم در درون زمین بدهد؟ به شکل زیر توجه کنید رابطه (۳-۸۷) برای نقطه ای مانند A در خارج زمین به صورت مقابل نوشته می شود: (۳-۹۰) $W_g(\bar{\mathbf{r}}_A) = G\iiint_{\mathcal{B}} \frac{\rho(\bar{\mathbf{r}})}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_A|}\, d\mathcal{B}$



شکل ۳-۱۴

در شکل (۳-۱٤) dm عنصر جرمی بینهایت کوچک متعلق به جسم جاذب (زمین) است که بردار موقعیت آن با $\bar{\mathbf{r}}$ نشان داده می شود و برای نشان دادن موقعیت آن در سیستم مختصات کروی از (r,θ,λ) استفاده می کنیم و همچنین نقطه A، نقطه ای واقع در خارج زمین است که می خواهیم پتانسیل جاذبه را در آنجا تعیین کنیم و موقعیت آن را با $\bar{\mathbf{r}}_A$ نشان داده ایم تصویر A بر روی کره با 'A نشان داده شده است و موقعیت آن در سیستم مختصات کروی با (r_A,θ_A,λ_A) نشان داده می شود. زاویه فضائی بین بردارهای موقعیت $\bar{\mathbf{r}}$ و $\bar{\mathbf{r}}_A$ را با ψ نشان داده ایم و کمان مقابل به این زاویه بر روی سطح کره هم اندازه این زاویه خواهد بود. تابع $\frac{1}{|\bar{\mathbf{r}}-\bar{\mathbf{r}}_A|}$ را می توان به صورت ذیل نوشت :

$$\frac{1}{|\bar{\mathbf{r}}-\bar{\mathbf{r}}_A|}=\left(r^2+r_A^2-2r\,r_A\cos\psi\right)^{-1/2}=\frac{1}{r_A}\left(1+(\frac{r}{r_A})^2-2(\frac{r}{r_A})\cos\psi\right)^{-1/2} \qquad (۹۱-۳)$$

در تئوری توابع لژاندر تابع $y=\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2}$ را تابع مولد چند جمله ای لژاندر می نامند در صورتی که $|x|\le 1$ و $|t|<1$ باشد، تابع مولد لژاندر قابل بسط به سری توابع لژاندر به صورت زیر خواهد بود:

$$y=\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n \qquad (۹۲-۳)$$

و در مورد رابطه (۳-۹۱) می توان در مقایسه با (۳-۹۲) با توجه به اینکه $|x|=|\cos\psi|\le 1$ و $|t|=\left|\frac{r}{r_A}\right|<1$ از بسط به سری توابع لژاندر استفاده کرد:

$$\frac{1}{|\bar{\mathbf{r}}-\bar{\mathbf{r}}_A|}=\frac{1}{r_A}\left(1+(\frac{r}{r_A})^2-2(\frac{r}{r_A})\cos\psi\right)^{-1/2}=\frac{1}{r_A}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{r}{r_A})^n P_n(\cos\psi) \qquad (۹۳-۳)$$

با استفاده از قضیه تجزیه لژاندر (۳-۸٤) در رابطه فوق تابع $P_n(\cos\psi)$ را می توان بسط داد و با جایگذاری تابع $\frac{1}{|\bar{\mathbf{r}}-\bar{\mathbf{r}}_A|}$ در رابطه (۳-۹۰) نتیجه زیر بدست می آید:

$$W_g(\bar{\mathbf{r}}_A)=G\iiint_{\mathcal{B}}\frac{\rho(\bar{\mathbf{r}})}{|\bar{\mathbf{r}}-\bar{\mathbf{r}}_A|}d\mathcal{B}=$$

$$G\iiint_{\mathcal{B}}\frac{\rho(\bar{\mathbf{r}})}{r_A}\left\{2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_A}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\frac{(n-m)!}{(1+\delta_{m,0})(n+m)!}\left[Y_{nm}^C(\theta_A,\lambda_A)Y_{nm}^C(\theta,\lambda)+Y_{nm}^S(\theta_A,\lambda_A)Y_{nm}^S(\theta,\lambda)\right]\right\}d\mathcal{B}$$

(۹٤-۳)

با تعویض جای $\sum$ و $\iiint$ در رابطه فوق رابطه ذیل حاصل می شود:

$$W_g(\bar{\mathbf{r}}_A)=2G\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_A^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}\frac{(n-m)!}{(1+\delta_{m,0})(n+m)!}Y_{nm}^C(\theta_A,\lambda_A)\iiint_{\mathcal{B}}r^n\rho(\bar{\mathbf{r}})Y_{nm}^C(\theta,\lambda)d\mathcal{B}+$$

$$Y_{nm}^S(\theta_A,\lambda_A)\iiint_{\mathcal{B}}r^n\rho(\bar{\mathbf{r}})Y_{nm}^S(\theta,\lambda)d\mathcal{B}$$

(۹۵-۳)

و همچنین تابع پتانسیل برای نقطه ای مانند A در خارج کره می تواند از (۳-۸۸) نیز محاسبه گردد:

$$W_g(r_A,\theta_A,\lambda_A)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r_A}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}Y_{nm}^C(\theta_A,\lambda_A)+B_{nm}Y_{nm}^S(\theta_A,\lambda_A)\right] \qquad (۹٦-۳)$$

رابطه (۳-۹۶) را به صورت زیر هم می توان نوشت :

$$W_g(r_A,\theta_A,\lambda_A) = 2G\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_A^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}\left[Y_{nm}^{C}(\theta_A,\lambda_A)\frac{a^{n+1}}{2G}A_{nm} + Y_{nm}^{S}(\theta_A,\lambda_A)\frac{a^{n+1}}{2G}B_{nm}\right] \quad (۹۷-۳)$$

از مقایسه جمله به جمله رابطه فوق با رابطه (۳-۹۵) روابط ذیل نتیجه می شود:

$$\frac{a^{n+1}}{2G}A_{nm} = \frac{(n-m)!}{(1+\delta_{m,0})(n+m)!}\iiint_{\mathcal{B}} r^n\rho(\bar{\mathbf{r}})Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda)d\mathcal{B}$$

$$\frac{a^{n+1}}{2G}B_{nm} = \frac{(n-m)!}{(1+\delta_{m,0})(n+m)!}\iiint_{\mathcal{B}} r^n\rho(\bar{\mathbf{r}})Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda)d\mathcal{B} \quad (۹۸-۳)$$

پس به ازای هر $n = 0,1,\ldots,\infty$ و $m \le n$ می توان ضرایب هارمونیکهای کروی به شکل زیر بدست آورد:

$$\begin{pmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{pmatrix} = \frac{2G}{a}\frac{(n-m)!}{(1+\delta_{m,0})(n+m)!}\iiint_{\mathcal{B}}\left(\frac{r}{a}\right)^n\rho(\bar{\mathbf{r}})\begin{pmatrix} Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda) \\ Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda) \end{pmatrix}d\mathcal{B} \quad (۹۹-۳)$$

اگر در رابطه فوق $m = 0$ قرار دهیم به فرمهای ساده تری برای A_{n0} و B_{n0} دست می یابیم :

$$B_{n0} = 0 \quad \text{و} \quad A_{n0} = \frac{G}{a}\iiint_{\mathcal{B}}\left(\frac{r}{a}\right)^n\rho(\bar{\mathbf{r}})P_n(\cos\theta)\,d\mathcal{B} \quad (۱۰۰-۳)$$

معادله (۳-۹۹) ضرایب پتانسیل را که بر حسب واحد پتانسیل می باشند مستقیما به توزیع جرم در درون زمین (ρ) مرتبط کرده است. مسئله معکوس، به عبارت دیگر محاسبه ρ از روی A_{nm} و B_{nm} ممکن نیست.

۳. ۸. تعابیرفیزیکی ضرایب هارمونیک کروی درجه پائین

هرچند که انجام مسئله معکوس ممکن نیست ولی می توان برخی از کمیتهائی که در ارتباط با توزیع جرم در زمین هستند را با معلوم بودن A_{nm} و B_{nm} مرتبه پائین ($n = 0,1,2$) بدست آورد. این کمیتها عبارتند از مختصات مرکز جرم زمین (X_C, Y_C, Z_C)، ممانهای اینرسی اصلی[۴۱] (I_x, I_y, I_z) و ممانهای اینرسی حاصلضرب (I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}) که با در نظر گرفتن یک سیستم مختصات (x, y, z) اختیاری بر طبق روابط ذیل تعریف می شوند:

$$Z_C = \frac{1}{M}\iiint_{\mathcal{B}} z\rho(\bar{\mathbf{r}})\,d\mathcal{B} \quad \text{و} \quad Y_C = \frac{1}{M}\iiint_{\mathcal{B}} y\rho(\bar{\mathbf{r}})\,d\mathcal{B} \quad \text{و} \quad X_C = \frac{1}{M}\iiint_{\mathcal{B}} x\rho(\bar{\mathbf{r}})\,d\mathcal{B} \quad (۱۰۱-۳)$$

$$I_z = \iiint_{\mathcal{B}}(x^2+y^2)\rho(\bar{\mathbf{r}})\,d\mathcal{B} \quad \text{و} \quad I_y = \iiint_{\mathcal{B}}(x^2+z^2)\rho(\bar{\mathbf{r}})\,d\mathcal{B} \quad \text{و} \quad I_x = \iiint_{\mathcal{B}}(y^2+z^2)\rho(\bar{\mathbf{r}})\,d\mathcal{B}$$

(۱۰۲-۳)

$$I_{yz} = \iiint_{\mathcal{B}} yz\rho(\bar{\mathbf{r}})\,d\mathcal{B} \quad \text{و} \quad I_{xz} = \iiint_{\mathcal{B}} xz\rho(\bar{\mathbf{r}})\,d\mathcal{B} \quad \text{و} \quad I_{xy} = \iiint_{\mathcal{B}} xy\rho(\bar{\mathbf{r}})\,d\mathcal{B} \quad (۱۰۳-۳)$$

همانطور که می دانید درتبدیل مختصات از سیستم کروی (r,θ,λ) به کارتزین روابط ذیل صدق می کند:

---

[۴۲] **مفهوم ممان اینرسی در فیزیک مشابه وریانس در تئوری خطاهاست، همانگونه که وریانس میزان پراکندگی مشاهدات را حول میانگین نشان می دهد ممان اینرسی میزان پراکندگی (یا میزان پخش شدگی) جرم جسم را حول محورهای مختصات X, Y,Z نشان می دهد.**

$$x = r\sin\theta\cos\lambda \quad , y = r\sin\theta\sin\lambda \ , \quad z = r\cos\theta \qquad (۱۰۴-۳)$$

با استفاده از رابطه (۳-۱۰۴)، مقادیر توابع $r^n Y_{nm}^C(\theta,\lambda)$ و $r^n Y_{nm}^S(\theta,\lambda)$ را در سیستم مختصات کارتزین محاسبه می کنیم به جدول (۳-۵) توجه کنید.

$r^0 Y_{00}^C(\theta,\lambda) = 1$	$r^0 Y_{00}^S(\theta,\lambda) = 0$
$r^1 Y_{10}^C(\theta,\lambda) = r\cos\theta = z$	$r^1 Y_{10}^S(\theta,\lambda) = 0$
$r^1 Y_{11}^C(\theta,\lambda) = r\sin\theta\cos\lambda = x$	$r^1 Y_{11}^S(\theta,\lambda) = r\sin\theta\sin\lambda = y$
$r^2 Y_{20}^C(\theta,\lambda) = \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) r^2 = \frac{1}{2}\left(2z^2 - x^2 - y^2\right)$	$r^2 Y_{20}^S(\theta,\lambda) = 0$
$r^2 Y_{21}^C(\theta,\lambda) = 3r^2\sin\theta\cos\theta\cos\lambda = 3xz$	$r^2 Y_{21}^S(\theta,\lambda) = 3r^2\sin\theta\cos\theta\sin\lambda = 3yz$
$r^2 Y_{22}^C(\theta,\lambda) = 3r^2\sin^2\theta\cos 2\lambda = 3(x^2 - y^2)$	$r^2 Y_{22}^S(\theta,\lambda) = 3r^2\sin^2\theta\sin 2\lambda = 6xy$

جدول (۳-۵) : مقادیر هارمونیکهای کروی مرتبه پائین در سیستم مختصات کروی

اکنون اگر ضرایب هارمونیک مرتبه پائین را حساب کنیم (با توجه به مقادیر بدست آمده از جدول فوق) :

$$A_{00} = \frac{G}{a}\iiint_{\mathcal{B}}\left(\frac{r}{a}\right)^0 \rho(\bar{\mathbf{r}}) Y_{00}^C(\theta,\lambda)\, d\mathcal{B} = \frac{G}{a}\iiint_{\mathcal{B}} \rho(\bar{\mathbf{r}})\, d\mathcal{B} = \frac{GM}{a}$$

$$A_{10} = \frac{G}{a}\iiint_{\mathcal{B}}\left(\frac{r}{a}\right)^1 \rho(\bar{\mathbf{r}}) Y_{10}^C(\theta,\lambda)\, d\mathcal{B} = \frac{G}{a^2}\iiint_{\mathcal{B}} z\rho(\bar{\mathbf{r}})\, d\mathcal{B} = \frac{GM}{a^2} Z_C$$

$$A_{11} = \frac{2G}{a}\frac{1}{2}\iiint_{\mathcal{B}}\left(\frac{r}{a}\right)^1 \rho(\bar{\mathbf{r}}) Y_{11}^C(\theta,\lambda)\, d\mathcal{B} = \frac{G}{a^2}\iiint_{\mathcal{B}} x\rho(\bar{\mathbf{r}})\, d\mathcal{B} = \frac{GM}{a^2} X_C$$

$$A_{20} = \frac{G}{a}\iiint_{\mathcal{B}}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \rho(\bar{\mathbf{r}}) Y_{20}^C(\theta,\lambda)\, d\mathcal{B} = \frac{G}{a^3}\iiint_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\left(2z^2 - x^2 - y^2\right)\rho(\bar{\mathbf{r}})\, d\mathcal{B} = \frac{G}{a^3}\left(\frac{I_x + I_y}{2} - I_z\right)$$

$$A_{21} = \frac{2G}{a}\frac{1}{3!}\iiint_{\mathcal{B}}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \rho(\bar{\mathbf{r}}) Y_{21}^C(\theta,\lambda)\, d\mathcal{B} = \frac{G}{3a^3}\iiint_{\mathcal{B}} 3xz\rho(\bar{\mathbf{r}})\, d\mathcal{B} = \frac{G}{a^3}\left(I_{xz}\right)$$

$$A_{22} = \frac{2G}{a}\frac{1}{4!}\iiint_{\mathcal{B}}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \rho(\bar{\mathbf{r}}) Y_{22}^C(\theta,\lambda)\, d\mathcal{B} = \frac{G}{12a^3}\iiint_{\mathcal{B}} 3(x^2 - y^2)\rho(\bar{\mathbf{r}})\, d\mathcal{B} = \frac{G}{4a^3}\left(I_y - I_x\right)$$

$$B_{20} = 0 \text{ و } B_{10} = 0 \text{ و } B_{00} = 0$$

$$B_{11} = \frac{2G}{a}\frac{1}{2}\iiint_{\mathcal{B}}\left(\frac{r}{a}\right)^1 \rho(\bar{\mathbf{r}}) Y_{11}^S(\theta,\lambda)\, d\mathcal{B} = \frac{G}{a^2}\iiint_{\mathcal{B}} y\rho(\bar{\mathbf{r}})\, d\mathcal{B} = \frac{GM}{a^2} Y_C$$

$$B_{21} = \frac{2G}{a}\frac{1}{3!}\iiint_{\mathcal{B}}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \rho(\bar{\mathbf{r}}) Y_{21}^S(\theta,\lambda)\, d\mathcal{B} = \frac{G}{3a^3}\iiint_{\mathcal{B}} 3yz\rho(\bar{\mathbf{r}})\, d\mathcal{B} = \frac{G}{a^3}\left(I_{yz}\right)$$

$$B_{22} = \frac{2G}{a}\frac{1}{4!}\iiint_{\mathcal{B}}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \rho(\bar{\mathbf{r}}) Y_{22}^S(\theta,\lambda)\, d\mathcal{B} = \frac{G}{12a^3}\iiint_{\mathcal{B}} 6xy\rho(\bar{\mathbf{r}})\, d\mathcal{B} = \frac{G}{2a^3}\left(I_{xy}\right)$$

$A_{00} = GM / a$	$B_{00} = 0$
$A_{10} = GMZ_C / a^2$	$B_{10} = 0$
$A_{11} = GMX_C / a^2$	$B_{11} = GMY_C / a^2$
$A_{20} = G / a^3((I_x + I_y)/2 - I_z)$	$B_{20} = 0$
$A_{21} = GI_{xz} / a^3$	$B_{21} = GI_{yz} / a^3$
$A_{22} = G(I_y - I_x)/4a^3$	$B_{22} = GI_{xy} / 2a^3$

(جدول ۳-۶) : مقادیر ضرایب هارمونیک کروی مرتبه پائین $(n = 0,1,2)$

نتایج بدست آمده نشان می دهد که ضرایب هارمونیک کروی مرتبه پائین نه تنها موقعیت مرکز جرم زمین را نشان می دهند بلکه توجیه و ابعاد بیضوی اینرشیای[42] زمین را هم در مبدا سیستم مختصات اتخاذ شده نشان می دهند. مراتب بالاتر ضرایب هارمونیک کروی نیز شبیه به اینها هستند ولی بسیار پیچیده تر هستند و بنابراین برای تفسیر دینامیکی زمین کاربرد کمتری دارند. نتایج بدست آمده در جدول (۳-۶) در تعریف یک سیستم مختصات زمین مرکز[43] طبیعی بسیار اهمیت دارند. اگر سیستم مختصات بصورتی تعریف شود که درآن $A_{10} = A_{11} = B_{11} = 0$ آنگاه سیستم مختصات زمین مرکز خواهد بود و اگر $A_{21} = B_{21} = B_{22} = 0$ بشود آنگاه سیستم مختصات هم محور با بیضوی اصلی اینرشیا خواهد بود و یک سیستم مختصات طبیعی زمین مرکز خواهیم داشت. در یک سیستم مختصات طبیعی ماتریس تنسور اینرشیا قطری می گردد:

$$\begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (۱۰۵-۳)$$

بر ای چنین سیستم مختصاتی در واقع فقط دو ضریب مرتبه پائین غیر صفر باقی می مانند :

$$A_{22} = \frac{G}{4a^3}\left(I_y - I_x\right) \text{ و } A_{20} = \frac{G}{a^3}\left(\frac{I_x + I_y}{2} - I_z\right) \quad (۱۰۶-۳)$$

در صورتی که $A_{22} = 0$ در نظر بگیریم بیضوی دو محوری خواهیم داشت که محورهای استوائی آن با یکدیگر مساویند و صفر فرض کردن $A_{20} = 0$ منجر به این می شود که دیگر بیضوی نداشته باشیم و کره جایگزین آن می گردد که دیگر چنین فرضی توصیه نمی گردد.

---

[42] Ellipsoid of inertia
[43] Geocentric

۳. ۸. ضرایب هارمونیک بدون واحد[44]

همانطور که تاکنون دیده ایم، ضرایب پتانسیل همگی بر حسب واحد های فیزیکی پتانسیل بیان می شوند مثلا m^2s^{-2} . معمولا برای راحتی در محاسبات در عمل از ضرایب پتانسیل بدون واحد استفاده می کنند. برای این منظور، پتانسیل جاذبه در رابطه (۳-۸۸) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\boxed{W_g(r,\theta,\lambda)=\frac{GM}{r}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\left[J_{nm}Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda)+K_{nm}Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\right]\right]} \quad (۱۰۷-۳)$$

و همانطور که از مقایسه این رابطه با (۳-۸۸) مشهود است : $J_{nm}=\frac{-A_{nm}a}{GM}$ و $K_{nm}=\frac{-B_{nm}a}{GM}$ (۳-۱۰۸)

نکته ای دراینجا قابل توجه است و آن اینست که وقتی از کلیه ضرایب پتانسیل صرفنظر می کنیم، تقریب کروی پتانسیل جاذبه بدست می آید: (۳-۱۰۹) $W_g^{\delta}(r)=\frac{GM}{r}$ که این در واقع پتانسیلی است که به یک میدان نیروی جاذبه برای یک جسم همگن کروی نسبت داده می شود. نتایج حاصل از مشاهدات در مورد زمین نشان داده است که $J_{20}\doteq 1082.63\times 10^{-6}$ که بسیار بزرگتر از مقادیر سایر ضرایب پتانسیل است که بزرگترین آنها لااقل 10^{-3} مرتبه از این مقدار کوچکتر است. در فصل بعد خواهیم دید که جمله $J_2=J_{20}$ بیضوی بودن زمین را منعکس می کند در حالیکه سایر ضرایب، منعکس کننده باقیمانده نامنظمی ها در شکل فیزیکی زمین هستند.

در سیستم مختصات طبیعی تعریف شده در بخش قبل رابطه زیر صدق می کند:

$$J_{2,0}=J_2=\frac{-\left(\frac{1}{2}\left(I_x+I_y\right)-I_z\right)}{Ma^2}\doteq\frac{I_z-I_x}{Ma^2} \quad (۱۱۰-۳)$$

بنابراین تقریب بیضوی پتانسیل جاذبه به صورت ذیل است:

$$W_g^{\varepsilon}(r,\theta)\doteq\frac{GM}{r}-\frac{G(I_z-I_x)}{r^3}P_2(\cos\theta)=\frac{GM}{r}(1+\frac{I_z-I_x}{2Mr^2})-\frac{3G(I_z-I_x)}{2r^3}\cos^2\theta$$

(۱۱۱-۳)

در فصل بعد راجع به تعریف یک مدل برای میدان جاذبه زمین بحث می کنیم.

---

[44] unitless coefficients

۴. میدان ثقل نرمال

در بسیاری از کاربردها بهتر اینست که با یک میدان جاذبه مدل کار کنیم. درجه ای که تا آن این میدان مدل باید میدان واقعی را تقریب کند بستگی به این دارد که چه نقشی را برای این میدان مدل در نظرگرفته باشیم. ساده ترین مدلی که می توان فرض کرد یک مدل شعاعی است . چنین میدانی (همانطور که در فصل ۲ اشاره کرده ایم) می تواند توسط یک جرم نقطه ای با اندازه بسیار کوچک ولی با جرمی به اندازه زمین تولید شود و یا توسط یک جسم کروی کاملا همگن (که توزیع جرم در همه جای آن یکسان باشد) برای نقاط خارج کره تولید شود. پتانسیل در چنین میدانی توسط رابطه $W_g^\delta(r) = \frac{GM}{r}$ (۱-٤) نشان داده می شود. در چنین میدانی پتانسیل تنها تابعی از فاصله از مرکز میدان نیرو می باشد. سطوح هم پتانسیل مربوط به آن هم مرکز هستند و به شکل سطوح کروی می باشند. ولی تقریب با یک کره بسیار غیر دقیق خواهد بود. شعاع استوائی زمین 21.5 km از شعاع قطبی آن بزرگتر است. ولی یک بیضوی دورانی متقارن می تواند تقریب خیلی بهتری برای میدان جاذبه واقعی زمین باشد زیرا که ژئوئید که شکل فیزیکی زمین است همواره اختلافی کمتر از ۱۰۰ متر با بیضوی دارد. پتانسیل و شتاب ثقلی که به چنین میدان نیروئی منتسب می شوند را پتانسیل نرمال و ثقل نرمال می گویند. بنابراین میدان نرمال یک تقریب بیضوی از میدان ثقل واقعی زمین است. برای پتانسیل ثقل واقعی می توان رابطه ای به صورت مقابل نوشت :

$$W = U + T \quad (۲-٤)$$

که در آن W پتانسیل ثقل کامل (پتانسیل واقعی زمین) می باشد و U پتانسیل ثقل نرمال است که تقریبی از پتانسیل ثقل واقعیست و T را انامولی پتانسیل می نامند که اختلاف بین پتانسیل واقعی و نرمال می باشد. ژئودزی فیزیکی ذاتا دانشی با گستره جهانی است. بنابراین بهترین کار اینست که همه افراد در همه نقاط زمین از یک میدان ثقل نرمال استفاده کنند. این مطلبی است که قویا انجمن بین المللی ژئودزی (IAG[1]) در قرن گذشته از آن حمایت کرده است. این موسسه در سالهای گذشته تعدادی سیستم مرجع ژئودتیک جهانی تعریف نموده است که GRS نامیده می شوند. این سیتمهای مرجع در سالهای ۱۹۳۰، ۱۹۶۷و ۱۹۸۰ میلادی تعریف شده اند که به نامهای GRS30، GRS67 و GRS80 معروف هستند. در جدول (٤-۱) مقادیر پارامترهای این بیضوی ها ذکر گردیده است. در بسیاری از سیستمهای مختصات و سطوح مرجع[2] منطقه ای یا جهانی که پس از ۱۹۸۰ برای تعیین موقعیت های هندسی تعریف شده اند پارامترهای مربوط به بیضوی GRS80 اقتباس گردیده است. برای مثال WGS1984 با برخی تغییرات ناچیز از همان پارامترهای GRS80 استفاده می کند.

	GRS30	GRS67	GRS80
a [m]	6378388	6378160	6378137
f^{-1}	297	298.247167	298.257222
GM $[10^{14}\,m^3s^{-2}]$	3.986329	3.986030	3.986005
$\omega\,[10^{-5}\,rads^{-1}]$	7.2921151	7.2921151467	7.292115

جدول (٤-۱) : پارامترهای اصلی میدان های ثقل نرمال تعریف شده برای زمین در سالهای مختلف

[1] International Association of Geodesy
[2] Geodetic datums

۴.۱. پتانسیل نرمال

هندسه میدان نرمال یا همان بیضوی توسط دو پارامتر اصلی که اندازه و شکل آنرا تعیین می کنند تعریف می شود. ما دو کمیت نیم قطر اطول (a) و فشردگی هندسی (f) را برای این منظور انتخاب می کنیم. توصیف یک میدان فیزیکی،دو پارامتر دیگر هم نیاز دارد. قدرت میدان توسط ثابت جاذبه زمین مرکز[3] (GM) تعریف می شود و از آنجائی که ما می خواهیم ثقل را هم در نظر بگیریم (ونه فقط جاذبه) سرعت زاویه ای دوران زمین (ω) هم باید در نظر گرفته شود. مجموعه این چهار پارامتر میدان نرمال را به طور کامل تعریف می کنند. برای GRS80 از ضریب شکل دینامیکی J_2^N که جلوتر راجع به آن توضیح خواهیم داد به جای فشردگی هندسی (f) استفاده می کنند. بنابراین به مجموعه کمیتهای a, J_2, GM, ω ثوابت تعریف کننده می گویند. پتانسیل نرمال طوری تعریف می شود که دارای خصوصیات ذیل باشد:

۱- دارای تقارن دورانی است (zonal) یعنی پتانسیل تعریف شده به λ بستگی ندارد و فقط به ϕ وابسته است.

۲- دارای تقارن استوائی می باشد.

۳- مقدار آن برروی سطح بیضوی ثابت باقی می ماند.

خاصیت سوم دارای اساسی ترین اهمیت است. این خاصیت بیضوی را طوری تعریف می کند که یک سطح هم پتانسیل یا تراز باشد. به عبارت دیگر پتانسیل بیضوی باید طوری تعریف گردد که یکی از سطوح هم پتانسیل تولید شده توسط آن که دارای پتانسیل U_0 باشد (پتانسیلی که مساوی با W_0 از ثقل واقعی مربوط به ژئوئید است) و این سطح هم پتانسیل منطبق بر سطح بیضوی خواهد بود. این مجموعه از خصوصیات الگوریتمی را برای بدست آوردن پتانسیل نرمال ارائه می دهند. نقطه شروع ما بسط تابع پتانسیل جاذبه نرمال در خارج از بیضوی به سری هارمونیکهای کروی خواهد بود، زیرا که این تابع درخارج از بیضوی یک تابع هارمونیک است (رابطه ۳-۱۰۷) :

$$U_g(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}\left[J_{nm}^N Y_{nm}^C(\theta,\lambda) + K_{nm}^N Y_{nm}^S(\theta,\lambda)\right]\right] \quad (۳-٤)$$

و چون بیضوی را دورانی فرض کرده ایم دارای یک میدان نیروی گریز از مرکز هم می باشد :

$$U_C(r,\theta,\lambda) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta \quad (٤-٤)$$

و پتانسیل کامل میدان ثقل نرمال به صورت : $U = U_g + U_C$ (۵-٤) تعریف می شود :

$$U(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}\left[J_{nm}^N Y_{nm}^C(\theta,\lambda) + K_{nm}^N Y_{nm}^S(\theta,\lambda)\right]\right] + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta \quad (٦-٤)$$

با در نظر گرفتن شرط تقارن دورانی (شرط ۱) نقش λ از روی تابع پتانسیل برداشته می شود $(m = 0)$:

$$U(r,\theta) = \frac{GM}{r}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n J_{n0}^N P_{n0}(\cos\theta)\right] + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta \quad (۷-٤)$$

به عبارت دیگر با برداشته شدن نقش λ فقط هارمونیکهای از نوع zonal خواهیم داشت. خاصیت بعدی همان تقارن استوائی است یعنی مقدار تابع پتانسیل در عرضهای یکسان در بالای استوا و پائین استوا یکی است. به عبارت دیگر صفحه استوا، صفحه تقارن بیضوی است. مثلا مقدار U در عرض $\phi = 38^\circ N$ با مقدار آن در $\phi = 38^\circ S$ یکی است.

---

[3] geocentric gravitational constant

خاصیت تقارن استوائی باعث می شود که سری فقط درجات زوج داشته باشد و درجات فرد آن حذف می گردد به دلیل میرا بودن شدید ضرایب J_n^N، عملا بسط سری تا درجه ۸ مورد استفاده دارد.

$$\boxed{U(r,\theta)=\frac{GM}{r}\left[1-\sum_{n=2,4,6,8}\left(\frac{a}{r}\right)^n J_n^N P_n(\cos\theta)\right]+\frac{1}{2}\omega^2 r^2\sin^2\theta} \quad (۸-٤)$$

در رابطه فوق ضرایب پتانسیل نرمال $J_n^N = J_{n0}^N$ توابعی از کلیه پارامترهای مورد لزوم برای تعریف بیضوی هستند. برای مثال ضریب J_2^N که کمیتهای مربوط به گریز از مرکز درآن نهفته است را به صورت زیر محاسبه می گردد که ما آنرا بدون اثبات می پذیریم :

$$\boxed{J_2^N=\frac{2}{3}f-\frac{1}{3}m-\frac{1}{3}f^2+\frac{2}{21}fm} \quad (۹-٤)$$

در رابطه فوق (۱۰-٤) $m=\dfrac{\omega^2 a^2 b}{GM}$ می باشد و یک کمیت فیزیکی منعکس کننده پارامترهای گریز از مرکز است. برای بیضوی GRS80 با معلوم بودن پارامتر های نشان داده شده در جدول (۱-٤) مقادیر عددی ذیل برای m و J_2^N بدست می آید: (۱۱-٤) $m=0.003449786$ و $J_2^N=0.00108263$

برای درک بهتر و سادگی بیشتر در محاسبات بعدی از آنجائی که مقادیر ضرایب J_4^N, J_6^N, J_8^N اعداد بسیار کوچکی هستنددر اینجا از این ضرایب صرفنظر می کنیم و فقط $J_2^N, J_0^N=1$ را در محاسبه وارد می کنیم. مقصود ما از اینکار بدست آوردن یک تقریب خطی بر حسب f و J_2^N است ولی باید بدانیم عملا بسط فرمول تا $n=8$ اعتبار دارد:

$$U(r,\theta)=\frac{GM}{r}\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2^N P_2(\cos\theta)\right]+\frac{1}{2}\omega^2 r^2\sin^2\theta \quad (۹-٤)$$

و در ادامه با قراردادن مقدار $P_2(\cos\theta)$ در رابطه فوق :

$$U(r,\theta)=\frac{GM}{r}\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2^N\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)\right]+\frac{1}{2}\omega^2 r^2\sin^2\theta \quad (۱۰-٤)$$

رابطه فوق را می توان به صورت زیر هم نوشت:

$$U(r,\theta)=\frac{GM}{a}\left[\left(\frac{a}{r}\right)-\left(\frac{a}{r}\right)^3 J_2^N\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)+\left(\frac{a}{GM}\right)\frac{1}{2}\omega^2 r^2\sin^2\theta\right] \quad (۱۱-٤)$$

فرمول فوق با در نظر گرفتن تقریب $m\doteq\dfrac{ab^2\omega^2}{GM}$ (که با دقت نسبی0.003 قابل قبول است) و قرار دادن مقدار تقریبی $J_2^N\doteq\dfrac{2}{3}f-\dfrac{1}{3}m$ که با دقت نسبی 0.002 قابل قبول است، به شکل ذیل در خواهد آمد:

$$U(r,\theta)\doteq\frac{GM}{a}\left[\left(\frac{a}{r}\right)+\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\frac{1}{2}m-f\right)\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{b}\right)^2 m\sin^2\theta\right] \quad (۱۲-٤)$$

۴.۲. شتاب ثقل نرمال

با استفاده از تقریب خطی می توان شتاب ثقل نرمال را به صورت مشتق منفی شعاعی از پتانسیل ثقل نرمال در نظر گرفت : (۴-۱۳) $\gamma(r,\theta)=\dfrac{-\partial U(r,\theta)}{\partial r}$ که با قراردادن مقدار $U(r,\theta)$ از رابطه (۴-۱۲) :

$$\gamma(r,\theta)=\frac{-GM}{a}\left[\frac{-a}{r^2}-\frac{3a^3}{r^4}(\frac{1}{2}m-f)(\cos^2\theta-\frac{1}{3})+\frac{r}{b^2}m\sin^2\theta\right] \quad (۴-۱۴)$$

و یا می توان گفت: (۴-۱۵)

$$\gamma(r,\theta)=\frac{GM}{a}\left[\frac{a}{r^2}+\frac{3}{r}\left(\frac{a}{r}\right)^3(\frac{1}{2}m-f)(\cos^2\theta-\frac{1}{3})-\frac{r}{b^2}m\sin^2\theta\right]$$

بر روی سطح بیضوی با در نظر گرفتن تقریباتی می توان مقدار γ را با استفاده از رابطه فوق محاسبه نمود:

$$\gamma(\theta)\doteq\frac{GM}{a^2}\left[1+m+(f-\frac{5}{2}m)\sin^2\theta\right] \quad (۴-۱۶)$$

اگر معادله فوق را در استوا $\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$ و در قطبین زمین $(\theta=0,\theta=\pi)$ بر آورد کنیم :

$$\gamma_b\doteq\frac{GM}{a^2}(1+m) \text{ و } \gamma_a\doteq\frac{GM}{a^2}(1+f-\frac{3}{2}m) \quad (۴-۱۷)$$

و همانطور که ملاحظه می گردد مقدار شتاب ثقل نرمال در قطبین (γ_b) از مقدار آن در استوا (γ_a) بزرگتر است : $\gamma_b>\gamma_a$ زیرا که قطبین به مرکز جرم زمین نزدیکتر هستند. مشابه با فشردگی هندسی زمین $f=(a-b)/a$ کمیتی تعریف می شود که فشردگی جاذبه زمین نامیده می شود: (۴-۱۸) $f^*=\dfrac{\gamma_b-\gamma_a}{\gamma_a}$

از نقطه نظر عددی $f^*\approx 0.005$ می باشد. اگر اکنون مقادیر γ_a و γ_b را از رابطه (۴-۱۷) در رابطه (۴-۱۸) قرار دهیم: (۴-۱۹)

$$(f-\frac{3}{2}m=-0.0018) \quad f^*=\frac{\frac{5}{2}m-f}{1+f-\frac{3}{2}m}\doteq\frac{5}{2}m-f$$

رابطه فوق را می توان به این صورت هم نوشت : (۴-۲۰) $\boxed{f^*+f=\dfrac{5}{2}m}$

نتیجه بدست آمده در رابطه (۴-۲۰) بنام تئوری کلرو[4] مشهور است و اهمیت آن در اینجاست که یک کمیت دینامیکی (f^*) را به یک کمیت هندسی (f) و دوران زمین (با استفاده از m) به طریقی بسیار ساده مرتبط می سازد.

---

[4] Clairaut ریاضیدان فرانسوی

۴. ۳. فرمول دقیق محاسبه شتاب ثقل نرمال

تا رابطه (۴-۱۱) از علامت تقریب استفاده نکرده ایم ولی از آن به بعد برای راحتی در محاسبات از تقریبهائی استفاده نموده ایم در اینجا فرمولهای دقیقی را ذکر می کنیم که آنها را بدون اثبات خواهیم پذیرفت. تئوری یک بیضوی هم پتانسیل اولین بار توسط پیزتی[5] در سال ۱۸۹۴ ارائه شده است. این تئوری بعدها در سال ۱۹۲۹ توسط سومیگلیانا[6] تکمیل و ارائه گردیده است. فرمول ذیل که رابطه دقیق محاسبه ثقل نرمال است، بنام سومیگلیانا- پیزتی نامیده می شود:

$$\boxed{\gamma(\phi) = \frac{a\gamma_a \cos^2\phi + b\gamma_b \sin^2\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}} \qquad (۴-۲۱)$$

که آنرا می توان به صورت: $\gamma(\phi) = \gamma_a \dfrac{1 + k\sin^2\phi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\phi}}$ نوشت که درآن $e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$ و $k = \dfrac{b\gamma_b - a\gamma_a}{a\gamma_a}$ می باشند. ϕ عرض ژئودتیک می باشد و در مورد GRS80 مقادیر ثوابت $a, b, \gamma_a, \gamma_b, e^2$ و k در بخش بعد ذکر می گردند. در ژئودزی معمولا از فرمول دیگری که بر مبنای فرمول فوق می باشد استفاده می گردد. این فرمول بنام کاسینی[7] معروف است زیرا که کاسینی اولین کسی بوده است که ضرایب فرمول مزبور را در سال ۱۹۳۰ به اتحادیه بین المللی ژئودزی و ژئوفیزیک معرفی کرده است (برای تعریف GRS30):

$$\gamma(\phi) = \gamma_a(1 + 0.0052884\sin^2\phi - 0.0000059\sin^2 2\phi) \qquad (۴-۲۲)$$

برای GRS80 بسط سری شتاب ثقل نرمال به صورت ذیل می باشد:

$$\begin{aligned}\gamma(\phi) = \gamma_a(&1 + 0.005\,279\,0414\sin^2\phi + 0.000\,023\,2718\sin^4\phi \\ &+ 0.000\,000\,1262\sin^6\phi + 0.000\,000\,0007\sin^8\phi)\end{aligned} \qquad (۴-۲۳)$$

فرمول فوق با دقت نسبی 10^{-10} و دقت مطلق 10^{-4} mgal صحیح می باشد. برای بسیاری از کاربردها فرمول ذیل که دقت آن 0.1mgal است کفایت می کند:

$$\gamma(\phi) = 9.780327(1 + 0.0053024\sin^2\phi - 0.0000058\sin^2 2\phi) \qquad [\mathrm{m/s^2}] \qquad (۴-۲۴)$$

برای تبدیل انامولی های جاذبه از بیضوی GRS30 به GRS80 رابطه زیر وجود دارد:

$$\gamma_{1980} - \gamma_{1930} = \left(-16.3 + 13.7\sin^2\phi\right) \qquad [\mathrm{mGal}] \qquad (۴-۲۵)$$

یکی از عوامل اصلی که باعث تعریف GRS80 بعد از GRS67 گردید تغییر در مقدار مرجع در پوستدام آلمان بود که میزان این تغییر 14mGal− بوده است. برای تبدیل از فرمول جاذبه GRS67 به GRS80 فرمول دقیق مقابل وجود دارد: (۴-۲۶) $\gamma_{1980} - \gamma_{1967} = \left(0.8316 + 0.0782\sin^2\phi - 0.0007\sin^4\phi\right)$ [mGal]

---

[5] Pizzetti
[6] Somigliana
[7] Cassinis

۴.۴. ثوابت و پارامترهای GRS80

کمیت های تعریف کننده GRS80 عبارتند از : $a = 6378137m$ و $GM = 3.986005 \times 10^{14} m^3 s^{-2}$ و $J_2 = 0.00108263$ و $\omega = 7.292115 \times 10^{-5} rad\, s^{-1}$

کمیتهای ثابت زیر که به طریقه محاسباتی بدست آمده اند درحد اعشار ذکر شده دقیق هستند. در مواردی که دقت بالاتری مد نظر باشد مقادیر این کمیتها از فرمولهای ذکر شده محاسبه می شوند:

کمیتهای بدست آمده هندسی

$b = 6356752.3141m$ نیم قطر اقصر

$E = 521854.0097m$ خروج از مرکزی خطی

$c = 6399593.6259m$ شعاع انحناء قطبی

$e^2 = 0.00669438002290$ خروج از مرکزی

$e'^2 = 0.00673949677548$ خروج از مرکزی ثانویه

$f = 0.00335281068118$ فشردگی هندسی

$f^{-1} = 298.257222101$ معکوس فشردگی هندسی

$Q = 10001965.7293m$ ربع نصف النهار

$R_1 = (2a+b)/3$ شعاع متوسط $R_1 = 6371008.7714m$

$R_2 = 6371007.1810m$ شعاع کره هم سطح با بیضوی

$R_3 = 6371000.7900m$ شعاع کره هم حجم با بیضوی

کمیتهای بدست آمده فیزیکی

$U_0 = 62636860.850\, m^2 s^{-2}$ پتانسیل نرمال برروی بیضوی

$J_4 = -0.00000237091222$ ضریب هارمونیک کروی درجه ٤

$J_6 = 0.00000000608347$ ضریب هارمونیک کروی درجه ٦

$J_8 = -0.00000000001427$ ضریب هارمونیک کروی درجه ٨

$m = \omega^2 a^2 b / GM \quad m = 0.00344978600308$

$\gamma_a = 9.7803267715\, ms^{-2}$ ثقل نرمال در استوا

$\gamma_b = 9.8321863685\, ms^{-2}$ ثقل نرمال در قطبین

$\gamma_m = 9.797644656\, ms^{-2}$ ثقل نرمال متوسط بر روی بیضوی

$\gamma_{45^\circ} = 9.806199203\, ms^{-2}$ ثقل نرمال در عرض ژئودتیکی $\phi = 45^\circ$

$f^* = 0.005302440112$ فشردگی جاذبی

$$k = \frac{b\gamma_b - a\gamma_a}{a\gamma_a} \quad k = 0.001931851353$$

۵. تعیین ژئوئید

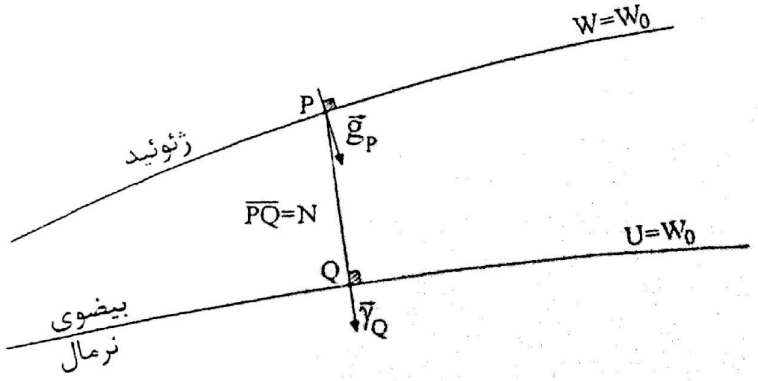
در این فصل قصد داریم با حل مسئله مقدار مرزی ژئودزی فیزیک رابطه اصلی تعیین ژئوئید به روش ثقل سنجی[1] را بدست آوریم. در آغاز مفاهیم پایه در این زمینه را که با بعضی از آنها از قبل نیز آشنائی دارید مرور می کنیم.

۵. ۱. تعاریف پایه

ژئوئید یکی از سطوح هم پتانسیل میدان ثقل زمین است که توسط رابطه زیر تعریف می شود:

$$W = W(r,\theta,\lambda) = W_0 = \text{const} \quad (۱-۵)$$

مقدار ثابت W_0 در رابطه فوق به صورتی انتخاب می شود که این سطح هم پتانسیل سطح متوسط آبهای آزاد[2] را به بهترین وجه تقریب کند. اگر پتانسیل نرمال روی سطح بیضوی مرجع را که خودش یکی از سطوح هم پتانسیل میدان ثقل نرمال می باشد، با U_0 نشان دهیم، ملاحظه می گردد که $U_0 = W_0$ و $U = W_0$ بیضوی مرجع[3] است (شکل ذیل):



شکل (۵-۱) : نمایش شماتیک مقطعی از ژئوئید و بیضوی مرجع

در شکل فوق P نقطه ای بر روی ژئوئید است و Q تصویر P بر روی بیضوی در راستای قائم بر بیضوی می باشد. فاصله $\overline{PQ}$ بین بیضوی و ژئوئید ارتفاع ژئوئید[4] یا نوسان ژئوئید[5] نامیده می شود و توسط حرف N آنرا نشان می دهند. پس دو میدان نیرو داریم که یکی ناشی از میدان ثقل واقعی زمین است و دیگری یک میدان مدل برای ثقل واقعی زمین است که دارای یک شکل منظم هندسی (بیضوی) می باشد و سعی شده است که حداقل اختلاف ممکن را از میدان ثقل واقعی زمین داشته باشد و بهترین تقریب برای آن باشد. این دو میدان نیرو از خود سطوح هم پتانسیلی تولید می کنند که سطوح هم پتانسیل متناظر هریک آنها بر هم منطبق نیستند و با یکدیگر

---

[1] Gravimetric geoid determination
[2] Mean sea level (surface)
[3] reference ellipsoid
[4] geoidal height
[5] geoidal undulation

اختلاف فاصله دارند. سطوح هم پتانسیلی که توسط میدان ثقل واقعی زمین تولید می شوند را W و سطوح هم پتانسیلی که توسط میدان ثقل بیضوی نرمال تولید می شوند را U نامیده ایم. یکی از سطوح هم پتانسیل میدان ثقل واقعی را W_0 نامیده ایم که مشخص کننده ژئوئید است و سطح هم پتانسیل روی بیضوی را نیز مساوی آن گرفته ایم ($U_0 = W_0$)، اختلاف بین این دو سطح هم پتانسیل را با N نشان داده ایم که دراین فصل هدف ما یافتن رابطه ای برای محاسبه N با استفاده از اندازه گیری جاذبه در سطح زمین است. در شکل (۵-۱) بردار شتاب ثقل واقعی زمین در نقطه P را با $\bar{g}_P$ و بردار شتاب ثقل نرمال در Q را با $\bar{\gamma}_Q$ نشان داده ایم. بردار انامولی جاذبه عبارتست از تفاضل بین این دو بردار:

$$\bar{\Delta}g = \bar{g}_P - \bar{\gamma}_Q \quad (۵-۲)$$

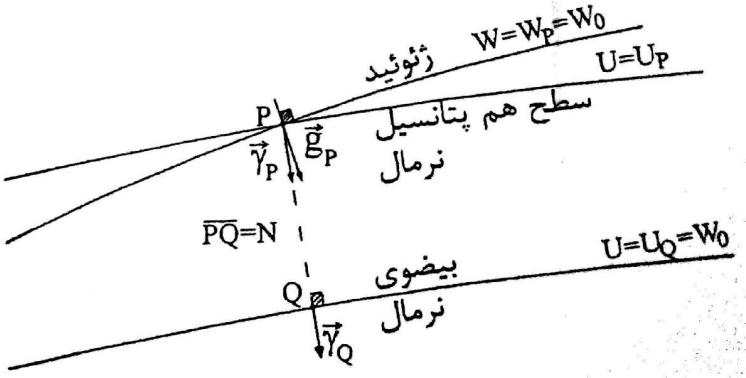
دو بردار $\bar{g}_P$ و $\bar{\gamma}_Q$ دارای اختلافاتی هستند اول اینست که مبدا این دو بر هم منطبق نیست و دیگر اینکه در یک راستا نیستند و نهایتا اندازه این دو با هم مساوی نیست. فرض کنیم با انتقال یکی از این دو بردار مبدا آن دو را برهم منطبق کنیم. اختلاف این دو بردار از نظر جهت را انحراف قائم نسبی[6] می نامند و با زاویه θ نشان می دهند و دارای دو مولفه شمالی ـ جنوبی و شرقی ـ غربی است که ξ و η نام دارند. اندازه اختلاف دو بردار $\bar{g}_P$ و $\bar{\gamma}_Q$ را انامولی جاذبه[7] می گویند:

$$\Delta g = \left|\bar{g}_P - \bar{\gamma}_Q\right| \quad (۵-۳)$$

از آنجائی که مقدار زاویه θ خیلی کوچک می باشد و در مواقع بسیار نادر $\theta = 1'$ می شود و معمولا $\theta \le 5''$ می باشد. بنابراین تاثیر اختلاف راستای دو بردار $\bar{g}_P$ و $\bar{\gamma}_Q$ بر روی اختلاف اندازه آنها بسیار کم و قابل چشم پوشی است و با صرفنظر از زاویه کوچک θ می توان گفت :

$$\Delta g = \left|\bar{g}_P\right| - \left|\bar{\gamma}_Q\right| = g_P - \gamma_Q \quad (۵-۴)$$

اگر یکی دیگر از سطوح هم پتانسیل تولید شونده توسط بیضوی نرمال را در نظر بگیریم و آن سطحی باشد که دقیقا از نقطه P بگذرد(شکل ۵-۲) ، آنگاه پتانسیل نرمال در این نقطه U_P خواهد بود و دقت کنید که مسلما $U_P \neq W_0$ می باشد.



شکل (۵-۲) : سطح هم پتانسیل نرمال گذرنده از P

بردار شتاب ثقل نرمال در نقطه P را $\bar{\gamma}_P$ می نامیم و اختلاف $\bar{g}_P$ و $\bar{\gamma}_P$ بردار نوسان جاذبه نامیده می شود:

$$\bar{\delta}g = \bar{g}_P - \bar{\gamma}_P \quad (۵-۵)$$

و قدر مطلق آن : $\delta g = \left|\bar{\delta}g\right| = \left|\bar{g}_P - \bar{\gamma}_P\right|$ نوسان جاذبه[8] نام دارد.

---

[6] relative deflection of the vertical
[7] gravity anomaly
[8] gravity disturbance

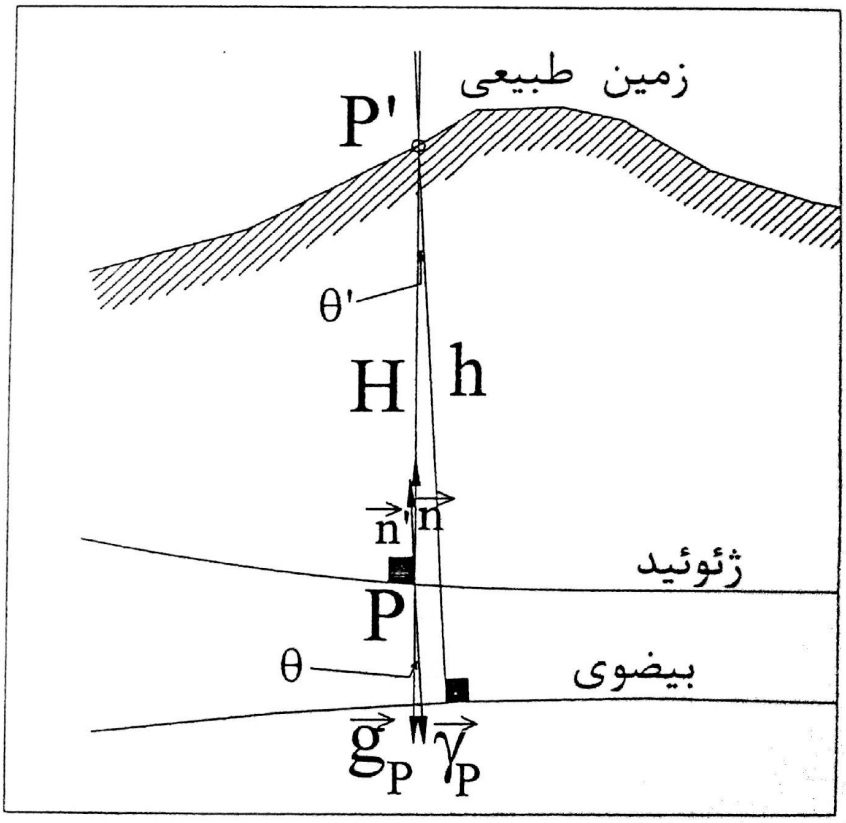
اختلاف راستای بین دو بردار $\vec{\gamma}_P$ و $\vec{\gamma}_Q$ بسیار کم است و تنها به دلیل انحناء خطوط نرمال از میدان ثقل نرمال می باشد یعنی خط PQ در واقع منحنی است و انحنای آن ناشی بیضوی نرمال است. به دلیل کوچک بودن N که حداکثر مقدار آن $\pm 100\text{m}$ است و ناچیز بودن انحناء ذکر شده، می توان زوایه بین دو بردار $\vec{g}_P$ و $\vec{\gamma}_P$ را با زاویه انحراف قائم نسبی (θ) یکی گرفت و همچنین می توان گفت: $\delta g = g_p - \gamma_p$ (۶-۵)

برای هرنقطه ای از فضا چه درون ژئوئید، بر روی آن و یا بالای آن می توان سطوح هم پتانسیل واقعی W و نرمال U را تعریف نمود. اختلاف بین W و U را در هرنقطه، انامولی پتانسیل[9] می گویند و آنرا با T نشان می دهند:

$$T(r,\theta,\lambda) = W(r,\theta,\lambda) - U(r,\theta,\lambda) \quad (۷-۵)$$

که در معادله فوق (r,θ,λ) مختصات نقطه ای دلخواه در فضای ذکر شده است. در ژئودزی فیزیک نقطه مورد علاقه ما که بیشتر راجع به انامولی پتانسیل در آن نقطه بحث می کنیم نقطه ای بر روی سطح ژئوئید است مانند P، بنابراین (شکل ۵-۲):

$$\boxed{T_P = W_P - U_P} \quad (۸-۵)$$



شکل ۵-۳ : نمایش شماتیک راستاهای قائم بر ژئوئید و قائم بر بیضوی و بردارهای یکه برونسو

به شکل فوق (۵-۳) دقت کنید از نقطه P' برروی زمین دو راستا می توان در نظر گرفت که یکی قائم بر ژئوئید و دیگری قائم بر بیضوی است. زاویه بین این دو راستا در سطح زمین (نقطه P') زاویه انحراف قائم سطحی نام دارد و آنرا با θ' نشان می دهند بر روی ژئوئید در نقطه P این زاویه θ می باشد و دقت کنید که $\theta \neq \theta'$ می باشد و البته اختلاف این دو جزئیست. فاصله نقطه ای از سطح زمین تا سطح بیضوی را در راستای قائم بر بیضوی h نامیده ایم که به آن ارتفاع ژئودتیک[10] یا ارتفاع از بیضوی می گویند و فاصله بین نقطه ای در سطح زمین تا سطح ژئوئید در راستای قائم بر ژئوئید را ارتفاع ارتومتریک[11] می گوئیم و با H نشان می دهیم. بردار قائم یکه برونسو

[9] disturbing potential
[10] geodetic height or ellipsoidal height
[11] orthometric height

ژئوئید در راستای قائم بر ژئوئید را ارتفاع ارتومتریک[11] می گوئیم و با H نشان می دهیم. بردار قائم یکه برونسو در در راستای قائم بر ژئوئید را در نقطه P بر روی ژئوئید با $\bar{\mathbf{n}}$ نشان می دهیم که هم راستا با H است و جهت آن مخالف با $\bar{\mathbf{g}}_P$ می باشد و بردار قائم یکه برونسو در نقطه P را که در راستای قائم بر بیضوی می باشد با $\bar{\mathbf{n}}'$ نشان داده ایم این بردار موازی با h است و در جهت مخالف با $\bar{\gamma}_P$ قرار دارد.

۵. ۲. روابط بین کمیت های اصلی در میدان جاذبه زمین

کمیت های اصلی در میدان جاذبه زمین عبارتند از: ۱- آنامولی پتانسیل (T) ۲- آنامولی جاذبه (Δg) ۳- نوسان جاذبه (δg) ٤- ارتفاع ژئوئید (N) ٥- مولفه های انحراف قائم (ξ,η)

که می توان بین کلیه این کمیتها با یکدیگر روابطی را پیدا نمود که بوسیله این روابط این کمیتها قابل تبدیل به یکدیگر هستند در مباحث پس از این با مهمترین این روابط آشنا خواهیم شد. به شکل (٥-٣) توجه کنید برای محاسبه کمیتهای $\bar{\mathbf{g}}_P$ و $\bar{\gamma}_P$ می توان از تابع پتانسیل مربوط به آنها گرادیان گرفت :

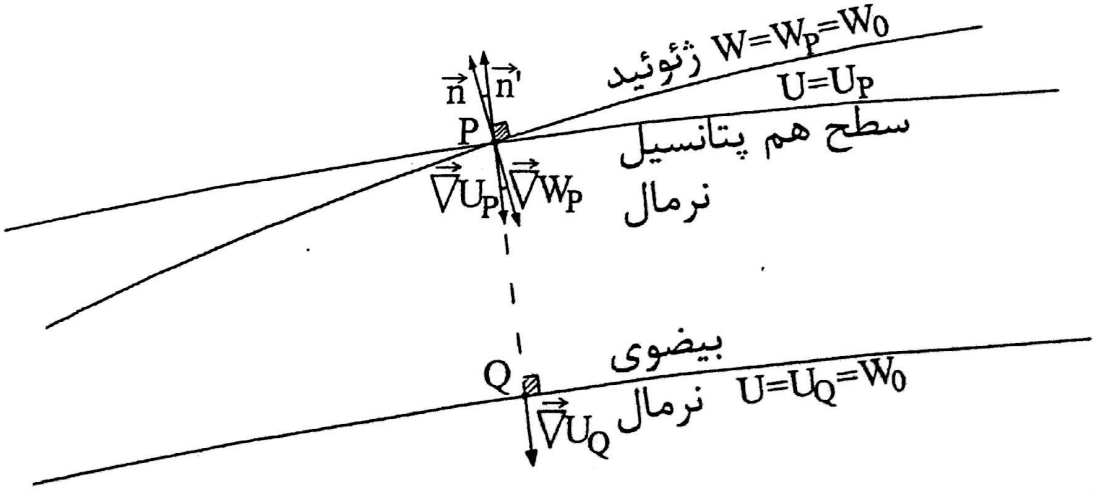
$$\bar{\delta}g = \bar{\mathbf{g}}_P - \bar{\gamma}_P = \bar{\nabla}(W_P - U_P) = \bar{\nabla}T \quad \Leftarrow \bar{\gamma}_P = \bar{\nabla}U_P \text{ و } \bar{\mathbf{g}}_P = \bar{\nabla}W_P \qquad (٥-٩)$$

و

$$\frac{\partial U_P}{\partial n'} = \bar{\nabla}U_P \cdot \bar{\mathbf{n}}' = |\bar{\nabla}U_P| \cdot |\bar{\mathbf{n}}'| . \cos\beta' \text{ و } \frac{\partial W_P}{\partial n} = \bar{\nabla}W_P \cdot \bar{\mathbf{n}} = |\bar{\nabla}W_P| \cdot |\bar{\mathbf{n}}| . \cos\beta \qquad (٥-١٠)$$

در رابطه فوق مشتقات جهتی در راستای بردار های قائم یکه $\bar{\mathbf{n}}$ و $\bar{\mathbf{n}}'$ مطرح گردیده اند و همانطور که از دروس ریاضیات پایه دانشگاهی به یاد دارید مشتق جهتی حاصلضرب اسکالر تابع برداری گرادیان در بردار مورد نظر می باشد به عبارت دیگر برابر اندازه تصویر بردار گرادیان بر روی بردار مورد نظر است و از طرفی همانطور که از فیزیک به خاطر دارید برای کلیه سطوح هم پتانسیل راستای گرادیان تابع پتانسیل منطبق بر راستای قائم یکه خواهد بود و البته با جهت مخالف (شکل ٥-٤) پس می توان گفت چون : $\beta = \beta' = 180^\circ$ آنگاه $\cos\beta = \cos\beta' = -1$ و $|\bar{\mathbf{n}}| = |\bar{\mathbf{n}}'| = 1$ در نتیجه : (٥-١١)

$$\frac{\partial U_P}{\partial n'} = -|\bar{\nabla}U_P| \text{ و } \frac{\partial W_P}{\partial n} = -|\bar{\nabla}W_P|$$



شکل (٥-٤) : مقایسه اختلاف بین میدانهای نیروی نرمال و ژئوئید با یک میدان نیروی ایده آل کروی

[11] orthometric height

در مقایسه روابط (۵-۹) با (۵-۱۱)

$$\delta g = g_P - \gamma_P = \left|\vec{\nabla} W_P\right| - \left|\vec{\nabla} U_P\right| = \frac{-\partial W_P}{\partial n} - \frac{-\partial U_P}{\partial n'} \quad (۵-۱۲)$$

که اگر راستای بردارهای $\vec{\mathbf{n}}$ و $\vec{\mathbf{n}}'$ را با صرفنظر از θ بر هم منطبق فرض کنیم:

$$\delta g = \frac{-\partial(W_P - U_P)}{\partial n} = \frac{-\partial T_P}{\partial n} \quad (۵-۱۳)$$

و چون $\vec{\mathbf{n}}$ و H در یک راستا می باشند، در ژئودزی فیزیک به جای استفاده از $\vec{\mathbf{n}}$ برای مشخص نمودن راستا وجهت از H استفاده می کنند چون جهت افزایش ارتفاع هم با $\vec{\mathbf{n}}$ یکی می باشد و رابطه (۵-۱۳) به این صورت نوشته می شود: (۵-۱۴) $\boxed{\delta g = \frac{-\partial T}{\partial H}}$ و دقت کنید که معمولا منظور از T مقدار انامولی پتانسیل بر روی ژئوئید (T_P) است و در غیر این صورت حتما از اندیس برای نشان دادن نقطه مورد نظر استفاده می شود.

چون راستای $\vec{\mathbf{n}}$ و $\vec{\mathbf{n}}'$ را بر هم منطبق فرض کرده ایم، پس راستاهای H و h هم بر هم منطبق می گردند و می توان (۵-۱۴) را برای h هم نوشت: (۵-۱۵) $\boxed{\delta g = \frac{-\partial T}{\partial h}}$ و البته با منطبق فرض کردن این دو راستاست که رابطه معروف (۵-۱۶) $\boxed{h = N + H}$ تحقق می یابد.

برای تحقق یافتن رابطه (۵-۱۳) باید مقدار U_P مشخص باشد، اما همانطور که می دانید U بر روی بیضوی تعریف می شود و U_Q را می توان معلوم فرض کرد پس باید به دنبال روشی باشیم که به کمک آن بتوان با استفاده از U_Q مقدار U_P را تعیین نمود. برای این منظور از بسط تابع U در همسایگی Q به سری تیلور استفاده می کنیم:

$$U_P = U_Q + \left.\frac{\partial U}{\partial H}\right|_Q N + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial H^2}\right|_Q N^2 + \ldots \quad (۵-۱۷)$$

به بسط فوق اصطلاحا upward continuation گفته می شود. با مقدارگذاری رابطه فوق در (۵-۸) و صرفنظر از جمله دوم به بعد:

$$T_P = W_P - U_P = W_P - \left(U_Q + \left.\frac{\partial U}{\partial H}\right|_Q N\right) = W_P - U_Q - \left.\frac{\partial U}{\partial H}\right|_Q N = \gamma_Q N$$

در رابطه فوق توجه کنید که: $W_P - U_Q = 0$

$$\Rightarrow \boxed{N = \frac{T_P}{\gamma_Q}} \quad (۵-۱۸)$$

رابطه (۵-۱۸) یکی از روابط بسیار مهم در ژئودزی فیزیک است که بنام فرمول دوم برونز[12] شهرت دارد.

به رابطه (۵-۶) باز می گردیم:

$$\delta g = g_P - \gamma_P = g_P - \left(\gamma_Q + \left.\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right|_Q N + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \gamma}{\partial H^2}\right|_Q N^2 + \ldots\right)$$

که مجددا با صرفنظر از جمله دوم بسط به بعد:

$$\delta g = \Delta g - \left.\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right|_Q N \quad (۵-۱۹)$$

و با جایگذاری روابط (۵-۱۸) و (۵-۱۴) در رابطه فوق:

$$\left.\frac{-\partial T}{\partial H}\right|_P = \Delta g - \left.\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right|_Q \frac{T_P}{\gamma_Q} \quad (۵-۲۰)$$

$$\Delta g = \left.\frac{-\partial T}{\partial H}\right|_P + \left.\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right|_Q \frac{T_P}{\gamma_Q} \quad (۵-۲۱)$$

---

[12] second Brouns formula

رابطه (۵-۲۱) را به صورت مقابل هم می توان نوشت : (۵-۲۲)

$$\Delta g = \left.\frac{-\partial T}{\partial h}\right|_P + \left.\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right|_Q \frac{T_P}{\gamma_Q}$$

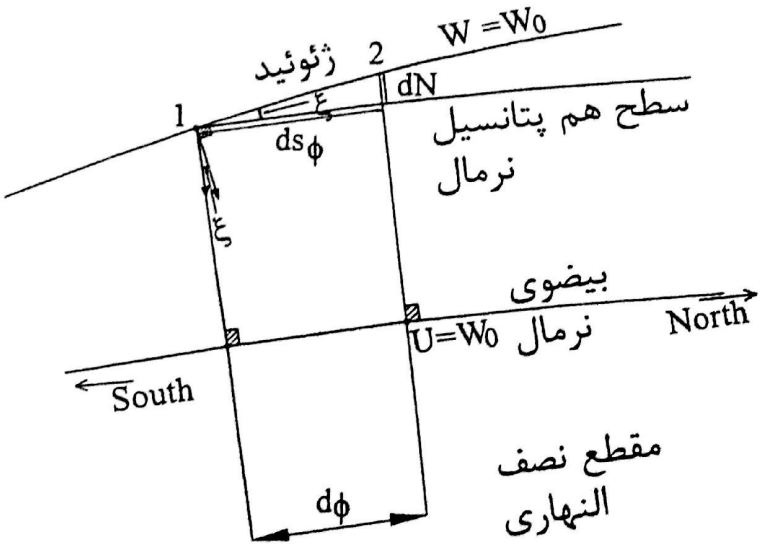
و با حذف اندیس های جملات از (۵-۲۱) فرم ذیل برای اناملی جاذبه بدست می آید، که به معادله بنیادی جاذبه[13] شهرت دارد: (۵-۲۳)

$$\boxed{\Delta g = \frac{-\partial T}{\partial H} + \frac{\partial \gamma}{\partial H}\frac{T}{\gamma}}$$

جلوتر خواهیم دید که معادله فوق شرط مرزی نوع سوم را برای حل معادله دیفرانسیل لاپلاس در خارج از ژئوئید تامین می کند: (۵-۲۴)

$$\Delta T = \Delta(W - U) = 0$$

کمیت ها اصلی دیگری که در ارتباط با میدان جاذبه زمین وجود دارند مولفه های انحراف قائم (ξ, η) می باشند. همانطور که از دروس قبلی ژئودزی به خاطر دارید ξ مولفه انحراف قائم شمالی ـ جنوبی نام دارد و تصویر زاویه انحراف قائم در صفحه نصف النهاری است از دیدگاه ژئودزی فیزیک در واقع عبارتست از شیب ژئوئید در راستای شمالی ـ جنوبی والبته دقت کنید که ما راجع به مولفه های انحراف قائم نسبی بر روی ژئوئید بحث می کنیم و شیب ژئوئید نسبت به بیضوی سنجیده می شود (شکل ۵-۵).



شکل (۵-۵) : تصویر زاویه انحراف قائم نسبی بر روی ژئوئید مساوی با شیب ژئوئید است.

مطابق شکل فوق اگر $dN = N_1 - N_2 < 0$ باشد شیب ژئوئید در جهت شمال است و بالعکس آن هنگامی که $dN > 0$ باشد شیب ژئوئید به سمت جنوب خواهد بود. بطور کلی از آنجائی که بنابرقرارداد همواره شیب در جهت شمال باید مثبت باشد و در جهت جنوب منفی است، با توجه به شکل فوق و مطلب ذکر شده در مورد علامت dN: $\xi = \frac{-dN}{ds_\phi}$ و چون $ds_\phi = R\,d\phi$ که درآن R شعاع متوسط زمین می باشد: $\xi = \frac{-1}{R}\frac{\partial N}{\partial \phi}$

(۵-۲۵)

---

[13] fundamental gravimetric equation

با جایگذاری مقدار N از فرمول بروبر $N = \frac{T}{\gamma}$ در رابطه (۵-۲۵)،

$$\xi = \frac{-1}{R}\frac{\partial N}{\partial \phi} = \frac{-1}{R}\frac{\partial (T/\gamma)}{\partial \phi} = \frac{-1}{R}\left[\frac{\partial T}{\partial \phi}\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial \phi}T\right] = \frac{-1}{R\gamma}\frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{T}{R\gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \qquad (۵-۲۶)$$

از آنجائیکه با مقدار گذاری عددی $\frac{T}{R\gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \le 0.16''$ خواهد شد و در نتیجه (۵-۲۷)

$$\boxed{\xi = \frac{-1}{R\gamma}\frac{\partial T}{\partial \phi}}$$

و برای مولفه شرقی ـ غربی (η) وضعیت دقیقا به همین منوال خواهد بود (۵-۲۸)

$$\eta = \frac{-dN}{ds_\lambda}$$

و چون $ds_\lambda = R\cos\phi\, d\lambda$، در نتیجه (۵-۲۹) $\eta = \frac{-1}{R\cos\phi}\frac{\partial N}{\partial \lambda}$ $\Leftarrow$ (۵-۳۰)

$$\boxed{\eta = \frac{-1}{R\gamma\cos\phi}\frac{\partial T}{\partial \lambda}}$$

تا اینجا موفق شده ایم که یک سری روابط دیفرانسیلی را بین کمیت های اصلی مختلف از میدان جاذبه زمین را با اناملی پتانسیل (T) بدست بیاوریم این روابط را به طور خلاصه در جدول (۵-۱) نشان داده ایم :

$N = \frac{T}{\gamma}$
$\delta g = \frac{-\partial T}{\partial H}$
$\Delta g = \frac{-\partial T}{\partial H} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial H}T$
$\xi = \frac{-1}{R\gamma}\frac{\partial T}{\partial \phi}$
$\eta = \frac{-1}{R\gamma\cos\phi}\frac{\partial T}{\partial \lambda}$

جدول ۵-۱ : روابط دیفرانسیلی بین کمیتهای اصلی میدان جاذبه زمین و اناملی پتانسیل

در بخشهای بعدی روابطی را بدست خواهیم آورد که بتوان به کمک آنها صریحا مقادیر T و N و (ξ,η) را از روی Δg (کمیتی که با مشاهدات زمینی جاذبه قابل حصول است)، محاسبه کنیم.

۵. ۳. رابطه اول برونز

یکی از مسائلی که در ژئودزی فیزیک دارای اهمیت زیادی می باشد تعیین گرادیان ثقل واقعی با ثقل نرمال برای نقاط واقع در درون یا بیرون زمین می باشد. به عبارت دیگر می خواهیم بدانیم $\frac{\partial g}{\partial H}$ و $\frac{\partial \gamma}{\partial h}$ چه مقداری دارد؟ ابتدا درباره ثقل واقعی زمین بحث می کنیم. یک سیستم مختصات کارتزین محلی دست راستی را در نظر بگیرید به گونه ای که محور z آن منطبق بر راستای قائم بر سطح هم پتانسیل $W = W_A$ در نقطه A باشد (شکل ۵-۶). اگر محور x را در راستای شمال فرض کنیم سیستم مختصات انتخابی ما هم ارز با[14] LA خواهد بود با این تفاوت که LA چپ گرد است. کمیتی که ما به دنبال آن هستیم عبارتست از :

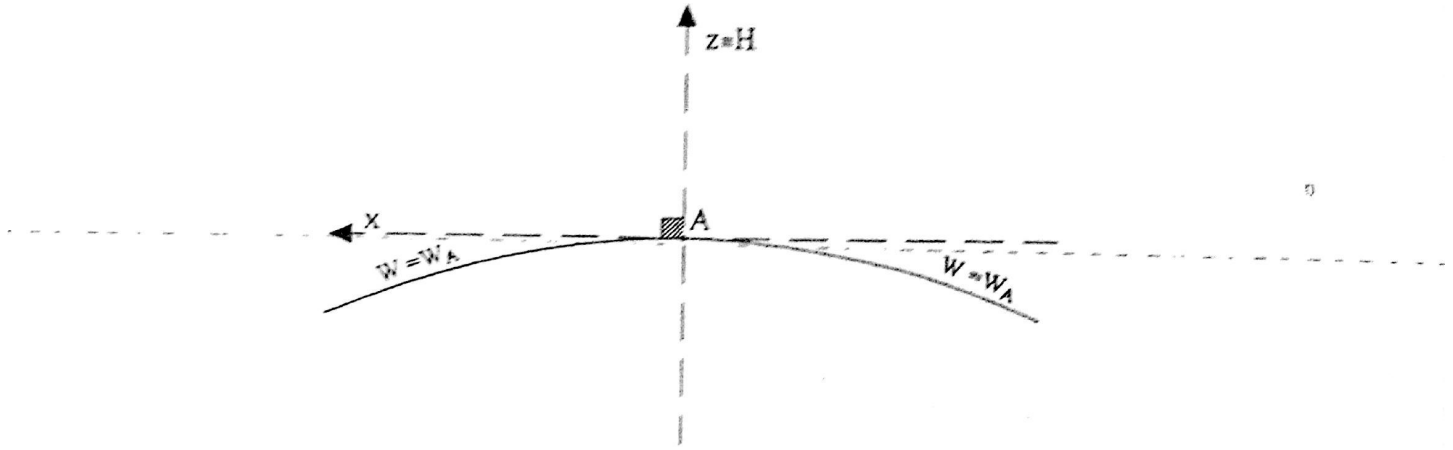
$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial g}{\partial H} = \frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \qquad (۵-۳۱)$$

اگر از معادله دیفرانسیل پواسن که برای نقاط خارج زمین صدق می کند، رابطه (۳-۲۱) از فصل ۳ استفاده کنیم :

---

[14] Local Astronomy coordinate system

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -4\pi G\rho_A + 2\omega^2 \quad (۳۲-۵)$$



شکل ۵-۶: سیستم مختصات کارتزین محلی (سیستم LA با محور y معکوس)

با جایگذاری رابطه (۵-۳۱) در (۵-۳۲) نتیجه زیر بدست می آید:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial H}\right|_A = \left.\frac{-\partial^2 W}{\partial z^2}\right|_A = 4\pi G\rho_A - 2\omega^2 + \left.\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\right|_A \quad (۳۳-۵)$$

در رابطه فوق ρ_A بر اساس موقعیت نقطه A تعیین می شود. حال باید مقدار $\left.\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\right|_A$ تعیین گردد، برای محاسبه این مقدار مجهول از یک ترفند خاص استفاده می کنیم که در آن معادله سطح هم پتانسیل به فرم ذیل بکار گرفته می شود: $W(x,y,z) = W_A$ (۵-۳۴) که این معادله ضمنی را می توان به صورت صریح ذیل نوشت: $z = z(x,y)$ (۵-۳۵) با استفاده از قوانین مشتق کامل[۱۵] اگر از تابع W دو بار مثلا نسبت به x، مشتق بگیریم، ابتدا: $\frac{dW}{dx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{dz}{dx}$ (۵-۳۶) و سپس با مشتق گیری دوم:

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)\frac{dz}{dx}\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{\partial W}{\partial z}\right]$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x}\frac{dz}{dx}\right] + \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\frac{dz}{dx}\right)\frac{dz}{dx}\right] + \left[\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\frac{\partial W}{\partial z}\right]$$

و نهایتا:

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\frac{\partial W}{\partial z} \quad (۵-۳۷)$$

---

[۱۵] مشتق کامل تابعی مانند $f = f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ همانطور که می دانید بصورت ذیل تعریف می شود:
$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$ و در حالت خاص هنگامی که: $z = f(x, y(x))$ باشد آنگاه:
$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$ خواهد بود.

ولی مشتق کامل فوق $\left(d^2W/dx^2\right)$ مساوی صفر است چون ما با یک سطح هم پتانسیل سروکار داریم که مقدار پتانسیل بر روی آن ثابت است $(W = const)$ و از آنجائیکه که محور z بر سطح هم پتانسیل عمود است مقدار $\frac{dz}{dx}$ هم صفر می شود و رابطه (۵-۳۷) به فرم ساده مقابل در می آید: (۵-۳۸)

$$0 = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{d^2 z}{dx^2}\frac{\partial W}{\partial z}$$

و نتیجه اینکه :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{\partial W}{\partial z}\frac{d^2 z}{dx^2} = g\frac{d^2 z}{dx^2} \quad (۵-۳۹)$$

از هندسه دیفرانسیل می دانیم که مشتق دوم $\frac{d^2 z}{dx^2}$ برابراست با انحنای سطح هم پتانسیل W در صفحه xAz (A مبدا است) که آنرا با J_x نشان می دهیم : (۵-۴۰) $\frac{d^2 z}{dx^2} = J_x$ که با جایگذاری (۵-۴۰) در (۵-۳۹) :

(۵-۴۱) $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = g\,J_x$ و به طریق مشابه در صفحه yAz ثابت می شود : (۵-۴۲) $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = g\,J_y$ که با جایگذاری در رابطه (۵-۳۳) :

$$\left.\frac{\partial g}{\partial H}\right|_A = 4\pi G\rho_A - 2\omega^2 + g(J_x + J_y)\Big|_A \quad (۵-۴۳)$$

اگر میانگین انحناهای J_x و J_y را با J –[۱۶] نشان دهیم: $J = -\frac{1}{2}\left(J_x + J_y\right)$ که با جایگذاری در رابطه بالا، بطور کلی برای هرنقطه ای بر روی سطح هم پتانسیل W : (۵-۴۴)

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial H} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2}$$

رابطه فوق برای اولین بار توسط یک ژئودزیست آلمانی بنام برونز در سال ۱۸۷۸ بدست آمده است و بنام **فرمول اول برونز** شهرت دارد. این رابطه در هرنقطه ای از فضا هنگامی بر قرار است که چگالی متناسب به آن با نقاطی بر روی مرز بین دو لایه با چگالی های مختلف معلوم باشد. رابطه (۵-۴۴) را می توان برای میدان ثقل نرمال استفاده نمود . اگر فضای بالای بیضوی را در نظر بگیریم و بخواهیم $\frac{\partial \gamma}{\partial H}$ را در بالای سطح بیضوی تعیین کنیم با صفر فرض کردن چگالی در فضای بالای بیضوی رابطه مقابل بدست می آید: (۵-۴۵)

$$\boxed{\frac{\partial \gamma}{\partial H} = -2\gamma J^N - 2\omega^2}$$

که درآن J^N انحناء متوسط سطح هم پتانسیل نرمال مورد نظر است. برروی سطح بیضوی می توان مقدار انحناء متوسط را توسط رابطه اولر به سادگی تعیین نمود: (۵-۴۶) $J_0^N = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right)$ که در آن M و N شعاعهای انحناء بیضوی در صفحات نصف النهاری و قائم اولیه می باشند: (۵-۴۷) $M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\phi)^{3/2}}$ و

(۵-۴۸) $N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}}$ که با انجام مقداری محاسبات ریاضی و در نظر گرفتن چند تقریب :

(۵-۴۹) $J_0^N \doteq \frac{b}{a^2}(1+2f\cos^2\phi)$ و با جایگذاری آن در (۵-۴۵) بر روی سطح بیضوی جائیکه $\gamma = \gamma_0$:

$$\left.\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right|_0 \doteq -2\gamma_0\frac{b}{a^2}(1+2f\cos^2\phi) - 2\omega^2 \quad (۵-۵۰)$$

که اگر با تقریب کمیت m را که در فصل قبل با آن آشنا شده اید به صورت زیر فرض کنیم:

---

[۱۶] علامت منفی به دلیل اینست که جهت انحناء به سمت داخل می باشد و موضوعی قراردادیست.

$m = \frac{a^2 b\omega^2}{GM} \doteq \frac{a\omega^2}{\gamma_0}$ (۵۱-۵) که $\gamma_0 \doteq \frac{GM}{ab}$ فرض گردیده است. آنگاه با جانشینی (۵-۵۱) در (۵-۵۰) :

$$\boxed{\left.\frac{\partial\gamma}{\partial H}\right|_0 \doteq \frac{-2\gamma_0}{a}\left[1 + 2f\cos^2\phi + m\right]} \qquad (۵۲-۵)$$

علامت منفی در روابط (۵-۵۲) و (۵-٤٤) نشان می دهد همانطور که انتظار می رود گرادیان ثقل نرمال و ثقل واقعی زمین با افزایش ارتفاع کاهش می یابد. با انجام یک سری محاسبات اولیه رابطه (۵-۵۲) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\left.\frac{\partial\gamma}{\partial H}\right|_0 \doteq -\frac{2\gamma_a}{a}1.00673\left(1 - 0.001415\sin^2\phi\right) \doteq -0.308745[mGal/m]\left(1 - 0.001415\sin^2\phi\right)$$

و اگر مقدار میانگین $\sin^2\phi$ را 0.4 در نظر بگیریم، رابطه ذیل بدست می آید:

$$\boxed{\left.\frac{\partial\gamma}{\partial H}\right|_0 \doteq -0.3086[mGal/m]} \qquad (۵۳-۵)$$

معادله فوق نشان می دهد به ازای هر یک متر فاصله از سطح بیضوی در راستای قائم برآن و به سمت خارج از آن به میزان -0.3086 mGal کاهش در شدت میدان ثقل نرمال متسب به بیضوی نرمال خواهیم داشت و البته این به شرطی است که چگالی فضای خارج بیضوی را صفر فرض کنیم.

۵. ٤. انتگرال استوکس[17]

روش سنتی استوکس در تعیین پارامترهای میدان جاذبه (T, N, ξ, η) از روی مشاهدات اندازه جاذبه، بر اساس حل مسئله مقدار مرزی خارجی برای اناملی پتانسیل می باشد.

$$T = W - U = W_g + W_C - U_g + U_C = W_g - U_g \qquad (۵٤-۵)$$

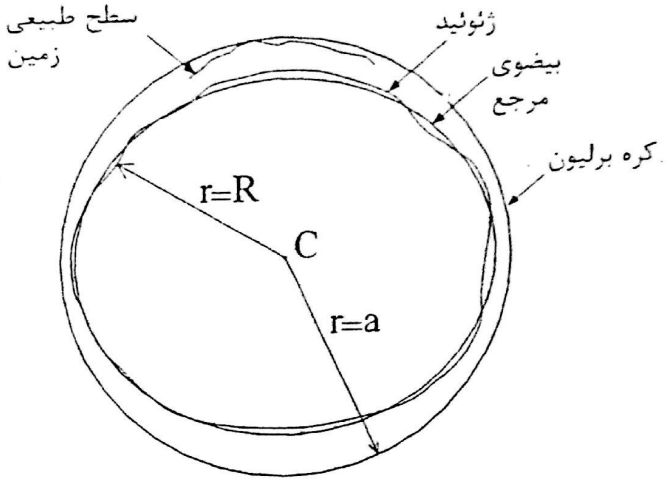
می دانید که $W_C = U_C$، در بیرون سطح فیزیکی زمین با صرفنظر از اتمسفر لاپلاسین تابع فوق صفر است: $\Delta T = 0$ اگر فرض کنیم که هیچ جرمی در فضای خارج از ژئوئید وجود نداشته باشد و چگالی در فضای خارج از ژئوئید صفر باشد، به عبارت دیگر اگر سطح مرزی خود را به جای سطح فیزیکی زمین سطح ژئوئید فرض کنیم آنگاه برای فضای خارج از ژئوئید : $\Delta T = 0$ (۵۵-۵)

حال اگر معادله بنیادی جاذبه را به عنوان شرط مرزی برای معادله دیفرانسیل لاپلاس فوق در نظر بگیریم : $\Delta g = \frac{-\partial T}{\partial H} + \frac{\partial\gamma}{\partial H}\frac{T}{\gamma}$ ، ملاحظه می شود که Δg یک ترکیب خطی از مقدار تابع T و مشتق این تابع $\frac{\partial T}{\partial H}$ بر روی ژئوئید است : $\Delta g = c_1\frac{\partial T}{\partial H} + c_2 T$ و همانطور که در فصل ۳ گفته شد ما دراینجا یک مسئله مقدار مرزی از نوع سوم (رابین یا ترکیبی) در اختیار داریم. مقدار g روی سطح زمین قابل اندازه گیری است و با تکنیکهائی که در فصل بعد با آنها آشنا می شویم می توان g را از سطح زمین به روی ژئوئید انتقال داد و با معلوم بودن مقدار γ بر روی سطح بیضوی Δg بدست می آید پس اناملی جاذبه که یک کمیت قابل مشاهده و اندازه گیریست است بر روی سطح مرزی ما یعنی ژئوئید معلوم است و این کمیت که یک ترکیب خطی از تابع پتانسیل و مشتق آن

---

[17] Stokes integral

می باشد شرایط مرزی را برای حل مسئله مقدار مرزی که به آن مسئله مقدار مرزی ژئودتیک[18] می گویند، تامین می کند (شکل ۵-۷).



شکل ۵-۷ : نمایش شماتیک سطوح مرجع بنیادی در تعریف و تبیین میدان جاذبه زمین

با حل معادله دیفرانسیل لاپلاس برای انامولی پتانسیل (۵-۵۵) رابطه زیر بدست می آید:

$$T(r,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}(T)\,Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda)+B_{nm}(T)\,Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\right] \quad (۵۶-۵)$$

که در آن $A_{nm}(T)$ و $B_{nm}(T)$ ضرایب هارمونیکهای کروی مربوط به تابع پتانسیل و از جنس پتانسیل می باشند و توجه داشته باشید که (T) نشاندهنده جنس این ضرایب است. با در نظر گرفتن تعریف ذیل :

$$T_n(\theta,\lambda)=\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}(T)\,Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda)+B_{nm}(T)\,Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\right] \quad (۵۷-۵)$$

که درآن $T_n(\theta,\lambda)$ هارمونیک سطحی لاپلاس[19] از درجه n نام دارد و به کمک تعریف فوق می توان رابطه (۵-۵۶) را به صورت فشرده مقابل نوشت:

$$\boxed{T(r,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}T_n(\theta,\lambda)} \quad (۵۸-۵)$$

که فرم فوق بسط طیفی[20] تابع انامولی پتانسیل گفته می شود. در رابطه (۵-۵۶) مقادیر ضرایب $A_{nm}(T)$ و $B_{nm}(T)$ برای ما مجهول است زیرا که مقدار تابع $T(r,\theta,\lambda)$ بر روی کره برلیون برای ما مجهول است. با مقداری تقریب ژئوئید را کره ای به شعاع R فرض می کنیم و در واقع این کره جایگزین کره برلیون می شود وسطح مرزی ما را تشکیل خواهد داد از آنجائیکه ما از چگالی خارج از ژئوئید کلا صرفنظر کرده ایم و از کره برلیون وقتی استفاده می کردیم که تابع پتانسیل برای فضای خارج از سطح طبیعی زمین هارمونیک بود و در اینجا انامولی پتانسیل در خارج از ژئوئید هارمونیک است، این فرض پذیرفته می شود. انگیزه ما از این کار تعیین شکل منظم هندسی برای سطح مرزی است چون بدون اطلاع از شکل سطح مرزی حل مسئله مقدار مرزی ممکن نیست

---

18 geodetic boundary value problem
19 Laplace's surface harmonic of degree n
20 Spectral development

و دلیل اینکه سطح مرزی را به جای بیضوی، کره فرض می کنیم برای سادگی وراحتی در محاسبات است و بعلاوه این تقریب نمی تواند صدمه زیادی به نتایج بدست آمده بزند و تاثیر آن تا حدود زیادی قابل اغماض است (با دقت نسبی $f = 1/300$ که به ازای $\pm 100m$ ارتفاع ژئوئید به میزان $\pm 30cm$ خطا خواهیم داشت) والبته برای تعیین ژئوئید دقیق سانتیمتری نمی توان از آن چشم پوشی نمود و باید به طریقی در محاسبات آنرا در نظر گرفت. با جایگزینی کره ای به شعاع $r = R$ به جای کره برلیون به شعاع $r = a$ ، مقدار انامولی پتانسیل از این رابطه بدست خواهد آمد:

$$T(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta,\lambda) \qquad (۵۹-۵)$$

اکنون قصد داریم با فرض تقریب کروی مقدار تابع انامولی جاذبه را بر روی سطح کره ای به شعاع R بدست آوریم. همانطور که می دانید بر اساس معادله بنیادی جاذبه : $\Delta g = \frac{-\partial T}{\partial H} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial H} T$

مقدار $\frac{\partial T}{\partial H}$ با استفاده از رابطه (۵-۵۹) بصورت ذیل محاسبه می گردد:

$$\frac{\partial T}{\partial H} = \frac{\partial T}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{-R}{r^2}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{n} T_n(\theta,\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{r}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta,\lambda) \qquad (۶۰-۵)$$

برای محاسبه قسمت دوم میدان جاذبه نرمال را کروی فرض می کنیم پس:

$$\gamma(r) = \frac{GM}{r^2} \text{ و } \frac{\partial \gamma}{\partial H} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} = \frac{-2GM}{r^3} \text{ ودر نتیجه: } \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial H} = \frac{r^2}{GM}\frac{-2GM}{r^3} = \frac{-2}{r} \qquad (۶۱-۵)$$

که مقدار این تابع بر روی سطح مرزی جائیکه $r = R$ به صورت $\left.\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right|_{r=R} = \frac{-2}{R}$ (۶۲-۵) می باشد.

بر روی سطح مرزی جائیکه $r = R$ با استفاده از (۵-۵۹) :

$$\boxed{T(r = R,\theta,\lambda) = T(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\theta,\lambda)} \qquad (۶۳-۵)$$

مقدار انامولی پتانسیل بر روی سطح ژئوئید $(r = R)$ از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$\Delta g|_{r=R} = \left.\frac{-\partial T}{\partial H}\right|_{r=R} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial H} T\Big|_{r=R} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{R}\right)T_n(\theta,\lambda) - \frac{2}{R}\sum_{n=0}^{\infty} T_n(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n-1}{R}\right)T_n(\theta,\lambda)$$

(۶۴-۵)

از سوی دیگر با بسط مقدار مرزی Δg بر حسب هارمونیکهای کروی بر روی ژئوئید $(r = R)$:

$$\Delta g|_{r=R} = \Delta g(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\Delta g_n(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}(\Delta g)\, Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda) + B_{nm}(\Delta g)\, Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\right]$$

(۶۵-۵)

که در رابطه فوق ضرایب $A_{nm}(\Delta g)$ و $B_{nm}(\Delta g)$ از جنس انامولی جاذبه هستند واز رابطه زیر بدست می آیند:

$$A_{nm}(\Delta g) = \oiint_{\text{geoid}} \Delta g(\theta,\lambda)\, \bar{Y}_{nm}^{C}(\theta,\lambda)\, d\mathcal{E}$$
$$B_{nm}(\Delta g) = \oiint_{\text{geoid}} \Delta g(\theta,\lambda)\, \bar{Y}_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\, d\mathcal{E} \qquad (۶۶-۵)$$

با مساوی قراردادن طرفین روابط (۵-۶۴) و (۵-۶۵) :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n-1}{R}\right)T_n(\theta,\lambda) \doteq \sum_{n=0}^{\infty}\Delta g_n(\theta,\lambda) \qquad (۶۷-۵)$$

علامت تقریب ($\doteq$) در رابطه (۵-۶۷) به دلیل اینست که در محاسباتی است که منجر به رابطه (۵-۶۴) شده است به جای بیضوی از کره استفاده شده است و همانگونه که قبلا گفتیم این مسئله با دقت نسبی 1/300 قابل قبول می باشد. نکته دیگری که باید بدان توجه داشت اینست که T و Δg هردو اناموالی هستند و اختلاف بین میدان ثقل نرمال و میدان ثقل واقعی زمین را نشان می دهند بنابراین مقادیر کوچکی دارند و استفاده از تقریب کروی برای اینها عملی می باشد (همانطور که برای N مثال زدیم) ولی برای خود توابع پتانسیل جاذبه، شتاب ثقل واقعی زمین و غیره که مقادیر بزرگی دارند چنین تقریبی غیر عملی و با خطای قابل توجهی همراه است. از رابطه (۵-۶۷) می توان نتیجه گرفت : (۵-۶۸)

$$T_n(\theta,\lambda) \doteq \left(\frac{R}{n-1}\right)\Delta g_n(\theta,\lambda) \quad \text{یا} \quad \left(\frac{n-1}{R}\right)T_n(\theta,\lambda) \doteq \Delta g_n(\theta,\lambda)$$

از روابط فوق این رابطه منتج می گردد : (۵-۶۹)

$$\begin{Bmatrix} A_{nm}(T) \\ B_{nm}(T) \end{Bmatrix} \doteq \frac{R}{n-1}\begin{Bmatrix} A_{nm}(\Delta g) \\ B_{nm}(\Delta g) \end{Bmatrix}$$

که با جانشینی رابطه فوق در (۵-۶۳):

$$T(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{R}{n-1}\Delta g_n(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{R}{n-1}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}(\Delta g)\,Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda) + B_{nm}(\Delta g)\,Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\right]$$

(۵-۷۰)

واضح است که به ازای $n = 1$ رابطه بالا تعریف نشده است. اگر از یک بیضوی مرجع زمین مرکز استفاده شود به ازای $n = 1$ ضرایب $A_{10}(T), A_{11}(T), B_{10}(T), B_{11}(T)$ همگی مساوی صفر خواهند شد و بنابراین برای چنین بیضوی زمین مرکزی می توان نوشت:

$$T(\theta,\lambda) = -RA_{00}(\Delta g) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{R}{n-1}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}(\Delta g)\,Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda) + B_{nm}(\Delta g)\,Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\right] \quad (۵-۷۱)$$

جمله مرتبه صفر از هارمونیکهای سطحی اناموالی پتانسیل از رابطه زیر بدست می آید:

$$T_0(\theta,\lambda) = -RA_{00}(\Delta g) \quad (۵-۷۲)$$

با استفاده از (۵-۶۶) : $T_0(\theta,\lambda) = -R\oiint_{\text{geoid}}\Delta g(\theta,\lambda)\,d\mathcal{E} \Leftarrow A_{00}(\Delta g) = \oiint_{\text{geoid}}\Delta g(\theta,\lambda)\,\bar{Y}_{00}^{C}(\theta,\lambda)\,d\mathcal{E}$

و چون $\oiint_{\text{geoid}}\Delta g(\theta,\lambda)\,d\mathcal{E} = \Delta g_0$ آنگاه : (۵-۷۳) $T_0 = T_0(\theta,\lambda) = -R\Delta g_0$

و از سوی دیگر : (۵-۷۴) $T_0 = W_0 - U_0 = \dfrac{GM}{r} - \dfrac{GM^N}{r} = G\dfrac{\delta M}{r}$ در این رابطه M^N جرم بیضوی نرمال است. با جایگذاری (۵-۷۴) در رابطه (۵-۷۳) : (۵-۷۵) $\Delta g_0 = \dfrac{-G\delta M}{rR}$ که برروی مرز ($r = R$) رابطه فوق به صورت مقابل تبدیل می شود: (۵-۷۶) $\Delta g_0 = \dfrac{-G\delta M}{R^2}$ با فرض مساوی بودن جرم بیضوی با جرم زمین : $\delta M = M - M^N = 0$ و $A_{00}(\Delta g)$ نیز صفر خواهد شد. نهایتا رابطه (۵-۷۱) با در نظر گرفتن شرایطی که ذکر گردید به فرم ذیل در خواهد آمد:

$$\boxed{T(\theta,\lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} T_n(\theta,\lambda) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{R}{n-1}\Delta g_n(\theta,\lambda)} \quad (۵-۷۷)$$

از آنجائیکه فرمول نهائی فوق هارمونیکهای مرتبه صفر و یک را شامل نمی شود، به این هارمونیکها هارمونیکهای ممنوع (forbidden harmonics) گفته می شود.

اکنون قصد داریم به عنوان هدف نهائی از این بخش تابع اناملی پتانسیل را برای دلخواه P واقع بر روی ژئوئید به مختصات (θ_P, λ_P) بدست بیاوریم، برای تحقق این منظور از رابطه (۵-۷۷) استفاده می کنیم:

$$T(\theta_P,\lambda_P)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{R}{n-1}\Delta g_n(\theta_P,\lambda_P)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{R}{n-1}\sum_{m=0}^{n}\left[A_{nm}(\Delta g)\,Y_{nm}^{C}(\theta_P,\lambda_P)+B_{nm}(\Delta g)\,Y_{nm}^{S}(\theta_P,\lambda_P)\right]$$

(۵-۷۸)

اگر مقادیر $A_{nm}(\Delta g)$ و $B_{nm}(\Delta g)$ از رابطه (۵-۶۶) در رابطه فوق جایگزین گردند:

$$T(\theta_P,\lambda_P)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{R}{n-1}\sum_{m=0}^{n}\left[\oiint_{\text{geoid}}\Delta g(\theta,\lambda)\,\bar{Y}_{nm}^{C}(\theta,\lambda)\;Y_{nm}^{C}(\theta_P,\lambda_P)d\mathcal{E}+\oiint_{\text{geoid}}\Delta g(\theta,\lambda)\,\bar{Y}_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\;Y_{nm}^{S}(\theta_P,\lambda_P)d\mathcal{E}\right]$$

و با عوض کردن جای $\oiint$ و $\sum$ در رابطه فوق :

$$T(\theta_P,\lambda_P)=\oiint_{\text{geoid}}\Delta g(\theta,\lambda)\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{R}{n-1}\sum_{m=0}^{n}\left(\bar{Y}_{nm}^{C}(\theta,\lambda)\;Y_{nm}^{C}(\theta_P,\lambda_P)+\bar{Y}_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\;Y_{nm}^{S}(\theta_P,\lambda_P)\right)\right]d\mathcal{E}$$

(۳-۷۹)

با استفاده از قضیه تجزیه لژاندر (۳-۸۵) ، در مورد رابطه بالا :

$$\frac{2n+1}{4\pi}P_n(\cos\psi)=\sum_{m=0}^{n}\left[\bar{Y}_{nm}^{C}(\theta_p,\lambda_p)Y_{nm}^{C}(\theta,\lambda)+\bar{Y}_{nm}^{S}(\theta_P,\lambda_P)Y_{nm}^{S}(\theta,\lambda)\right]\quad(۳-۸۰)$$

که با جایگزینی رابطه (۳-۸۰) در (۳-۷۹) :

$$T(\theta_P,\lambda_P)=\frac{R}{4\pi}\oiint_{\text{geoid}}\Delta g(\theta,\lambda)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)\,d\mathcal{E}\quad(۳-۸۱)$$

در رابطه فوق با درنظر گرفتن خطائی معادل فشردگی هندسی ($f=1/300$) می توان گفت : $\theta=90-\phi$

$$\boxed{T(\phi_P,\lambda_P)=\frac{R}{4\pi}\oiint_{\text{geoid}}\Delta g(\phi,\lambda)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)\,d\mathcal{E}}\quad(۳-۸۲)$$

در رابطه فوق همانطور که می دانید ψ فاصله کروی است بین نقطه محاسبه[21] (ϕ_P,λ_P) (یعنی نقطه ای که $T(\phi_P,\lambda_P)$ برای آن مجهول است و محاسبه آن مورد نظر می باشد) و نقطه متغیر[22] (ϕ,λ) بر روی ژئوئید که مشاهده $\Delta g(\phi,\lambda)$ به آن منتسب می باشد. بنابراین برای هریک نقطه ای که بخواهیم محاسبه کنیم به تعداد مشاهدات Δg فاصله کروی ψ خواهیم داشت. همانطور که در فصل ۳ رابطه (۳-۸۶) هم گفته شده است ψ از رابطه زیر محاسبه می شود: (۳-۸۳)

$$\psi=\cos^{-1}\left[\sin\phi_P\sin\phi+\cos\phi_P\cos\phi\cos(\lambda-\lambda_P)\right]$$

در رابطه (۳-۸۲) سری ذکر شده بر حسب $P_n(\cos\psi)$ را می توان به فرم بسته[23] ذیل نوشت که اثبات آن در فصل آخر ذکر خواهد شد:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)=S(\psi)=1+\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\psi}-6\sin\frac{1}{2}\psi-5\cos\psi-3\cos\psi\ln\left(\sin\frac{1}{2}\psi+\sin^2\frac{1}{2}\psi\right)$$

(۳-۸۴)

---

21 computation point
22 dummy variable
23 closed form

به تابع $S(\psi)$ در رابطه (۳-۸۴) تابع استوکس یا هسته (کرنل) استوکس[24] گفته می شود که با جانشین سازی آن در (۳-۸۲)، نهایتا حل مسئله مقدار مرزی ژئودزیک را خواهیم داشت:

$$T(\phi_P,\lambda_P)=\frac{R}{4\pi}\iint_{\text{geoid}}\Delta g(\phi,\lambda)S\big(\psi(\phi_P,\lambda_P,\phi,\lambda)\big)\,d\mathcal{E} \quad (۳-۸۵)$$

که این رابطه را انتگرال استوکس می نامند و همانطور که ملاحظه می کنید برای تعیین انامولی پتانسیل در یک نقطه بر روی ژئوئید باید مقادیر انامولی جاذبه را برای کل کره زمین در اختیار داشته باشیم و قاعدتا هرچقدر اطلاعات بیشتر ودقیق تری از انامولی جاذبه بر روی ژئوئید داشته باشیم مقدار T با دقت بهتری بدست خواهد آمد. نکته قابل بحث دیگر اینست که ما در ابتدا فرض کردیم که در فضای خارج ژئوئید چگالی صفر باشد ولی عملا چنین چیزی نیست و ما باروشهائی که در بخش بعد راجع به آنها صحبت خواهیم کرد اثر اجرام مابین ژئوئید و سطح طبیعی زمین را به گونه ای لحاظ خواهیم کرد. اکنون با فرمولی آشنا می شویم که نام این فصل را به خود اختصاص داده است و یکی از مهمترین روابط شناخته شده در ژئودزی فیزیک می باشد. با در نظر گرفتن فرمول دوم برونز و جایگذاری $T(\phi_P,\lambda_P)$ ازرابطه (۳-۸۵)، نتیجه ذیل بدست می آید:

$$\boxed{N(\phi_P,\lambda_P)=\frac{R}{4\pi\gamma_0}\iint_{\text{geoid}}\Delta g(\phi,\lambda)S(\psi)\,d\mathcal{E}} \quad (۳-۸۶)$$

فرمول فوق اولین بار توسط استوکس[25] فیزیکدان انگلیسی در سال ۱۸۸۳ منتشر شده است و به همین جهت فرمول استوکس نامیده می شود. در رابطه (۳-۸۵) γ_0 مقدار متوسط γ در منطقه محاسبه می باشد.

۵. ۵. جنبه های عملی در تعیین ژئوئید با استفاده از فرمول استوکس

اولین گام در استفاده عملی از رابطه استوکس تبدیل آن از انتگرال سطح به انتگرال دوگانه است:

$$\boxed{N(\theta_P,\lambda_P)=\frac{R}{4\pi\gamma_0}\int_{\lambda=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\Delta g(\theta,\lambda)S(\psi)\sin\theta\,d\theta\,d\lambda} \quad (۳-۸۷)$$

که اگر در رابطه فوق نقطه متغییر را Q بنامیم، آنگاه می توان آنرا به صورت زیر هم نوشت :

$$N_P=\frac{R}{4\pi\gamma_0}\int_{\lambda=0}^{2\pi}\int_{\phi=-\pi/2}^{\phi=\pi/2}\Delta g_Q S(\psi_{PQ})\sin\theta\,d\theta\,d\lambda \quad (۳-۸۸)$$

و عملا برای محاسبه، انتگرال تبدیل به جمع خواهد شد:

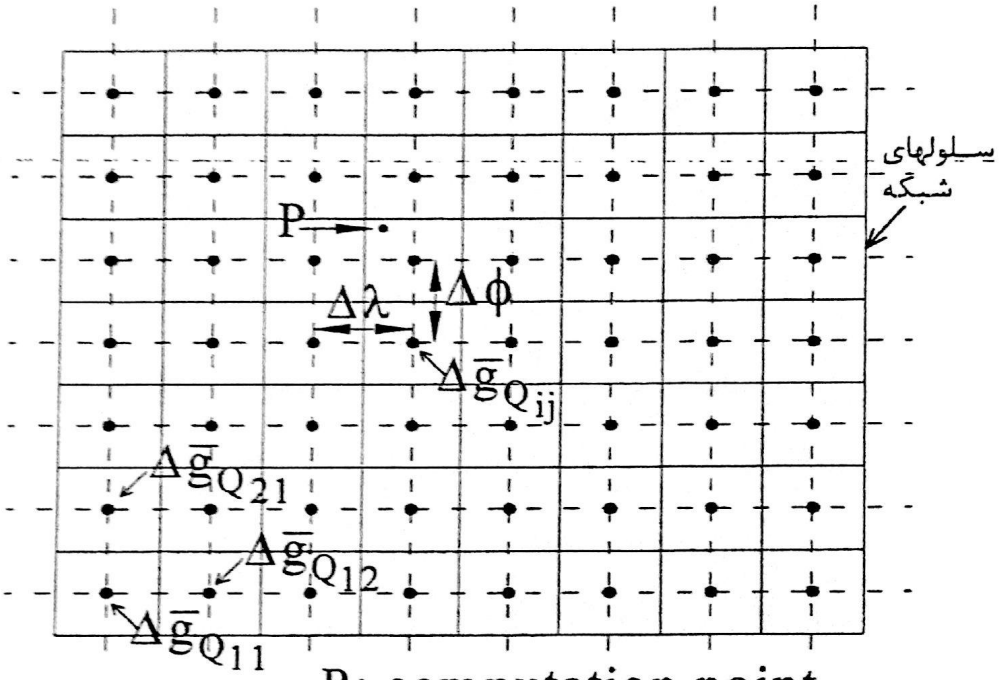
$$N_P=\frac{R}{4\pi\gamma_0}\sum_i\sum_j S(\psi_{PQ_{ij}})\Delta\bar{g}_{Q_{ij}}\sin\theta_i\,\Delta\theta\,\Delta\lambda \quad (۳-۸۹)$$

که برای استفاده از رابطه فوق باید مقادیر $\Delta\bar{g}_{Q_{ij}}$ بر روی یک شبکه منظم[26] معلوم باشد (شکل ۵-۸). که خود $\Delta\bar{g}_{Q_{ij}}$ ها در واقع میانگین مقادیر واقعی اندازه گیری شده هستند که با استفاده از روش های پیش بینی و درون یابی[27] محاسبه می شوند زیرا که عملا مقادیر Δg_Q را بر روی شبکه ای نامنظم داریم و ناگزیر به استفاده از این روشها برای بهترین برآورد از $\Delta\bar{g}_{Q_{ij}}$ در محل نقاط تقاطع شبکه هستیم. البته این خود یکی از اشکالات این

---

[24] Stokes kernel
[25] George Gabriel Stokes (1819-1903)
[26] regular grid
[27] prediction and interpolation

روش است زیرا که تغییرات Δg بسیار پیچیده و متغییر است به گونه ای که حتی بهترین روشهای پیش بینی Δg در نقاط گرهی شبکه هم نمی توانند مقدار واقعی را دراین نقاط با اطمینان پیش بینی کنند زیرا که تغییرات انامولی جاذبه به مانند توپوگرافی به راحتی محسوس نیست که ما توانسته باشیم با اندازه گیری آنها در نقاطی که دارای بیشترین تغییرات هستند مقدارش را در سایر نقاط صحیح پیش بینی کنیم.

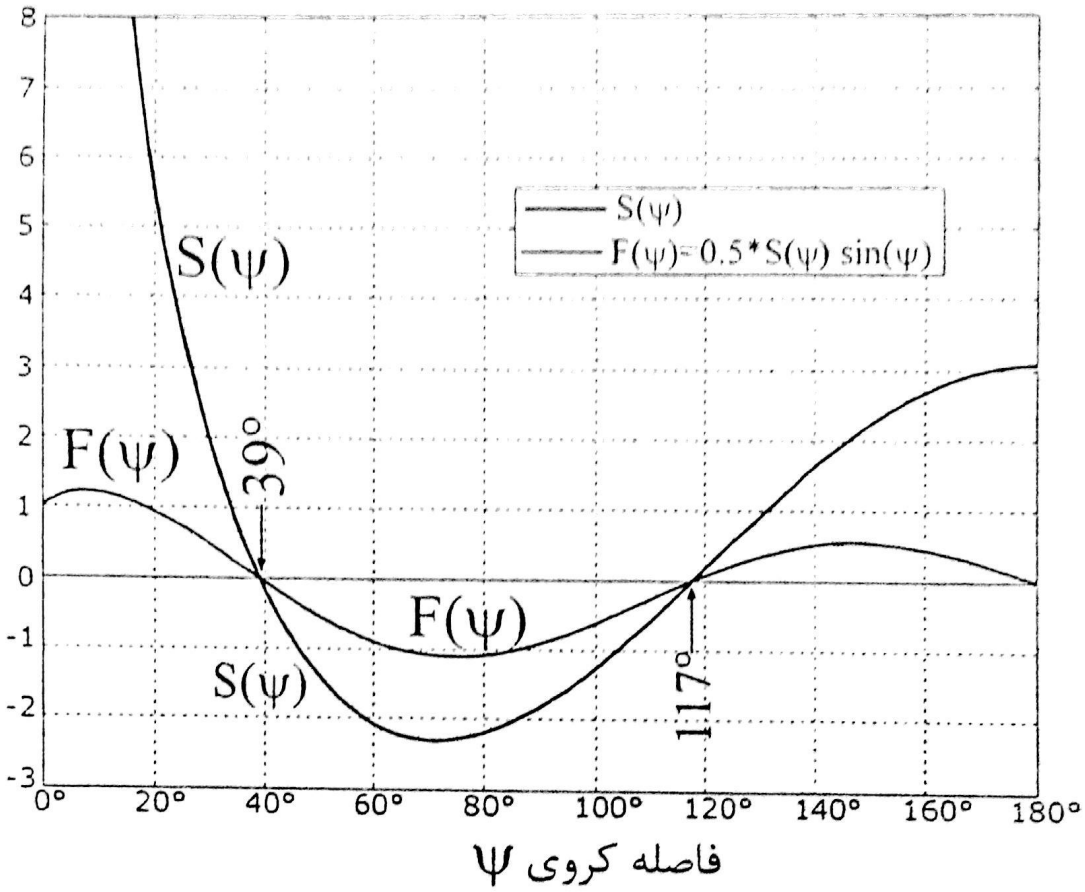


P: computation point
Q_{ij}: dummy variables

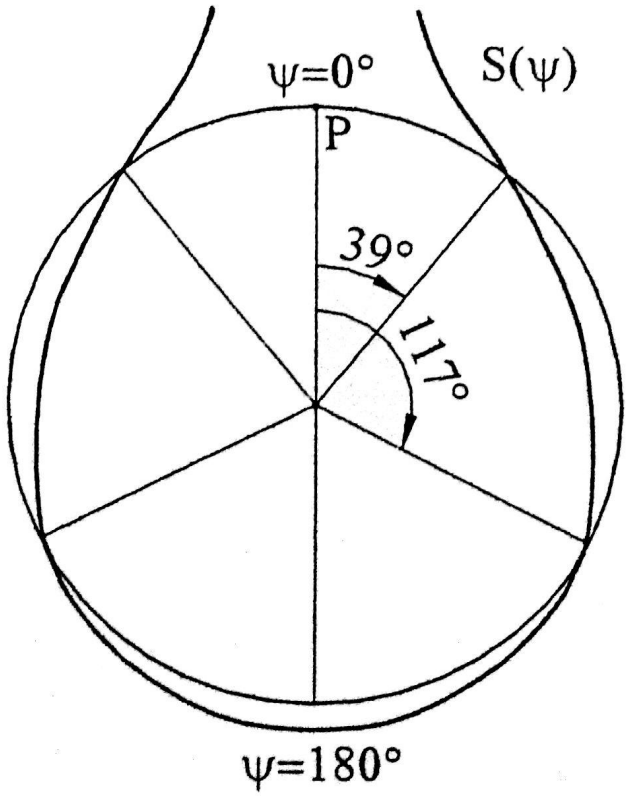
شکل (۵-۸) : محاسبه انتگرال استوکس با تولید یک شبکه منظم از انامولی های جاذبه متوسط

هرچقدر ابعاد سلولها در شبکه فوق کوچکتر باشد اطلاعات با چگالی بیشتری خواهیم داشت و ارتفاع ژئوئیدی که برآورد می گردد دقت بهتری خواهد داشت. $\Delta\bar{g}_{Q_{ij}}$ ها، انامولیهای جاذبه متوسط هستند که مقادیر آنها از روی مشاهدات انامولی های جاذبه ای که درون هریک از سلولها تعدادی از آنها اندازه گیری شده اند، برآورد گردیده است.

نکته دیگر قابل بحث در مورد فرمول استوکس، مسئله کرنل استوکس $S(\psi)$ است که توسط رابطه (۳-۸٤) توصیف گرده است. اگر نمودار تغییرات کرنل استوکس را در فاصله $0 < \psi \leq \pi$ ترسیم کنیم (شکل ۵-۹) ملاحظه می گردد که اولا به ازای $\psi = 0$، کرنل استوکس تعریف نشده و اصطلاحا منفرد (singular) است و بنابراین از انامولی جاذبه منتسب به خود نقطه محاسبه Δg_P نمی توان استفاده کرد و ثانیا حتی در نقاط همسایگی نقطه محاسبه نیز مقدار $S(\psi)$ در مقایسه با سایر جاها عدد بسیار بزرگی خواهد شد به گونه ای که تاثیر Δg مربوط به سایر نقاط کاملا تحت شعاع نقاط همسایگی P قرار می گیرد. مقدار $S(\psi)$ در دو فاصله $\psi = 38^\circ$ و $\psi = 117^\circ$ مساوی صفر خواهد شد و این بدان معناست که انامولی جاذبه نقاطی که در این فواصل از P قرار دارند تاثیری بر روی N_P نخواهد داشت و درفاصله $38^\circ < \psi < 117^\circ$ مقدار $S(\psi)$ منفی است پس تاثیر انامولی نقاطی که دراین فواصل قراردارند بر روی N_P بصورت جملات منفی در $\sum$ خواهد بود (شکل ۵-۱۰).

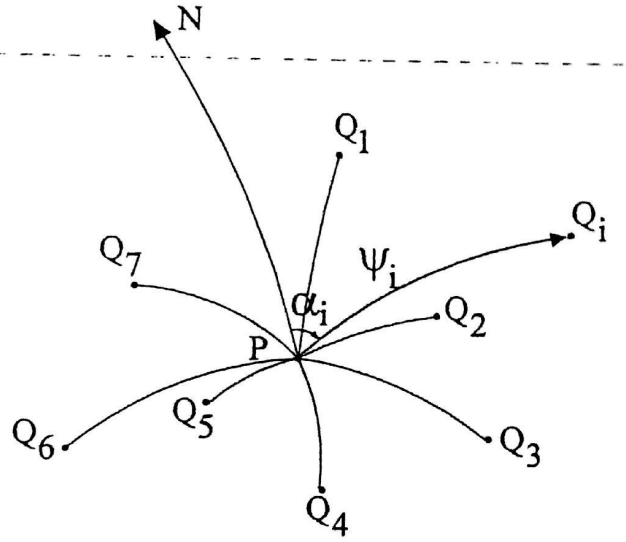


شکل (۵-۹) : رفتار کرنل های استوکس $S(\psi)$ و $F(\psi)$ در فاصله $0 \le \psi \le \pi$



شکل (۵-۱۰) : نمایش شماتیک تغییرات $S(\psi)$ در فاصله $0 \le \psi \le \pi$ بر روی کره

برای رفع مشکل singularity کرنل استوکس که جلوتر بدان اشاره کردیم یکی از تدابیری که اتخاذ می گردد بکار بردن سیستم مختصات قطبی (ψ,α) به جای سیستم مختصات کروی (θ,λ) می باشد. البته سیستم قطبی ذکر شده برروی سطح کره تعریف می شود و به مرکزیت نقطه محاسبه (P) می باشد، α آزیموت نقاط متغییر (Q) با Δg های معلوم است که در این روش لزومی برای قرار گرفتن آنها برروی شبکه منظم وجود ندارد و می توان از مقدار آنها در محل اندازه گیری استفاده کرد (شکل ۵-۱۱) و لااقل مشکل احتمالی پیش بینی اشتباه مقادیر Δg بر روی شبکه منظم بروز نخواهد کرد.



شکل (۵-۱۱) : استفاده از سیستم مختصات قطبی برای محاسبه انتگرال استوکس

با اعمال سیستم مختصات قطبی به روی (۳-۸۶)، این رابطه بصورت ذیل تبدیل می گردد:

$$N_P = \frac{R}{4\pi\gamma_0}\int_{\psi=0}^{\pi}\int_{\alpha=0}^{2\pi}\Delta g(\psi_Q,\alpha_Q)S(\psi_{PQ})\sin\psi_{PQ}\,d\psi\,d\alpha \qquad (۹۰-۳)$$

که با ضرب $\sin\psi$ در کرنل استوکس $S(\psi)$ مشکل singularity این کرنل حذف می شود زیرا که $\sin\psi/2$ از مخرج حذف می گردد. رابطه (۳-۹۰) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$N_P = \frac{R}{2\gamma_0}\int_{\psi=0}^{\pi}S(\psi)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha=0}^{2\pi}\Delta g(\psi,\alpha)\,d\alpha\right]\sin\psi\,d\psi \qquad (۹۱-۳)$$

با فرض (۳-۹۲) $\Delta\bar{g}(\psi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha=0}^{2\pi}\Delta g(\psi,\alpha)\,d\alpha$ که درآن $\Delta\bar{g}(\psi)$ انامولی جاذبه متوسط در فاصله زاویه ای ثابت ψ از نقطه محاسبه می باشد، رابطه (۳-۹۱) به شکل ذیل تبدیل می شود:

$$N_P = \frac{R}{2\gamma_0}\int_{\psi=0}^{\pi}\Delta\bar{g}(\psi)S(\psi)\sin\psi\,d\psi = \frac{R}{\gamma_0}\int_{\psi=0}^{\pi}\Delta\bar{g}(\psi)F(\psi)\,d\psi \qquad (۹۳-۳)$$

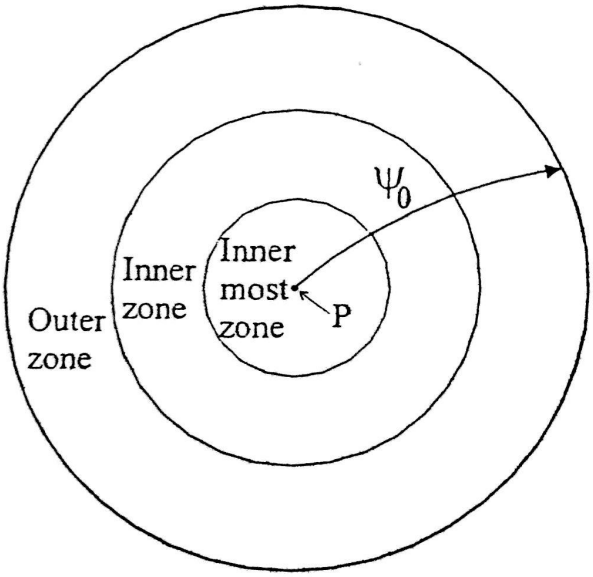
رفتار تابع $F(\psi)$ در انتگرال فوق را می توانید در شکل (۵-۹) ملاحظه نمائید و همانطور که در این شکل آشکار گردیده است مشکل singularity برای کرنل $F(\psi)$ وجود ندارد.

قبلا گفتیم که برای محاسبه ارتفاع ژئوئید به مقادیر Δg از کل کره زمین نیاز داریم ولی عملا انجام چنین چیزی برای محاسبه ژئوئید در یک منطقه از زمین ممکن نیست چون اولا اطلاعات ثقل سنجی دقیقی از کل دنیا در اختیار نداریم وثانیا اگر هم در اختیار داشته باشیم حجم محاسبات بسیار زیاد خواهد شد به همین دلیل ناحیه ای را دراطراف نقطه محاسبه انتخاب می کنند به شعاع ψ_0[28] که منطقه تحت پوشش این شعاع منطقه محاسبه گفته می شود و فقط از اطلاعات انامولی جاذبه در این منطقه برای محاسبه ارتفاع ژئوئید در P استفاده می شود در عمل معمولا $\psi_0 = 8'$ انتخاب می گردد که می تواند بزرگتر از این نیز انتخاب شود ولی مقدار ذکر شده حداقل اندازه آن باید باشد. منطقه محاسبه معمو لا به ۳ بخش تقسیم می گردد (شکل ۵-۱۲) که عبارتند از :

۱- ناحیه همسایگی بسیار نزدیک (Inner most Zone) : $(10')$

۲- ناحیه همسایگی نزدیک (Inner Zone)

۳- ناحیه بیرونی (outer Zone)



شکل (۵-۱۲) : تقسیم بندی منطقه اطراف نقطه محاسبه به نواحی مختلف

روش محاسبه در ناحیه همسایگی بسیار نزدیک با دو ناحیه دیگر متفاوت است زیرا که دراین ناحیه از انامولی های میانگین نمی توان استفاده کرد و باید از انامولی های نقطه ای استفاده نمود . معمولا برای این ناحیه از یک سیستم مختصات صفحه ای کارتزین محلی به مبدا P استفاده می کنند که با توجه به ابعاد کوچک این ناحیه اشکالی پیش نمی آید. مسئله دیگری که خواننده از خود خواهد پرسید اینست که پس تکلیف انامولی های سایر نقاط خارج از ناحیه بیرونی چه می شود؟ جواب این سوال به این صورت داده می شود که ژئوئید دارای یک سری طول موجهای کوتاه و طول موجهای متوسط و طول موجهای بلند است:

$$N(\phi_P, \lambda_P) = \sum_{n=2}^{\infty} N_n(\phi_P, \lambda_P) = N_2 + N_3 + N_4 + \ldots + N_{20} + N_{21} + \ldots \qquad (۹۴-۳)$$

طول موجهای بلند ژئوئید که معمولا از N_2 تا N_{20} می باشند، از مدلهای جهانی ژئوئید که با استفاده از تجزیه و تحلیل اطلاعات ماهواره های ثقل سنجی بدست می آیند محاسبه می گردند و در واقع این مدلها تغییرات کلی

---

[28] spherical cap

ژئوئید را در سراسر جهان نشان می دهند و طول موجهای متوسط و کوتاه که تغییرات جزئی و منطقه ای ژئوئید را نشان می دهند با استفاده از انتگرال استوکس در منطقه محاسبه تعیین می گردند و همچنین تکنیکهای ریاضی وجود دارد که به کمک آنها می توان اثر خطای ناشی از انامولی نقاط خارج از منطقه محاسبه را به حداقل رسانید. بحث در مورد اصول ریاضی و جزئیات این روشها از حوصله این درس خارج است و در دوره های مربوط به تحصیلات تکمیلی ژئودزی ارائه می گردد. خوشبختانه امروزه مدلهای جهانی مناسبی برای تعیین ژئوئید وجود دارد که علاوه بر اطلاعات ماهواره های ثقل سنجی در آنها از اطلاعات ثقل سنجی مناطق زیادی از جهان (عموما کشورهای توسعه یافته) استفاده شده است و همچنین اطلاعات ثقل دریائی (با توجه به پوشش ۷۵٪ در صدی کره زمین) به روش ارتفاع یابی ماهواره ای تعیین گردیده است و به کمک این حجم عظیم از اطلاعات، مدلهائی بدست آمده است که به کمک آنها می توان با دقت مطلقی در حدود ۲۰ متر یا کمتر ژئوئید را در کلیه نقاط زمین تعیین نمود. دقیق ترین این مدلها EGM96[۲۹] نام دارد که مشترکا توسط دو موسسه NIMA[۳۰] و NASA[۳۱] تهیه گردیده است. در مدلهای ماهواره ای ژئوئید، ارتفاع ژئوئید توسط رابطه ذیل محاسبه می گردد:

$$\boxed{N(\phi,\lambda) = R\sum_{n=2}^{L}\sum_{m=0}^{n}\left[\Delta\bar{J}_{nm}\cos(m\lambda) + \Delta\bar{K}_{nm}\sin(m\lambda)\right]\bar{P}_{nm}(\sin\phi)} \qquad (۹۵-۳)$$

که در رابطه فوق مقادیرضرایب بدون واحد $\Delta\bar{J}_{nm}$ و $\Delta\bar{K}_{nm}$ توسط مدل ارائه می گردد. برای مدل EGM96 تا درجه و مرتبه 360 مقادیر ضرایب ارائه شده است که می تواند نمای کلی مناسبی از ژئوئید را در سطح جهان ارائه نماید.

۵. ٦. رابطه وینینگ - مینز[۳۲]

زوایای مولفه انحراف قائم را می توان با استفاده از فرمول استوکس محاسبه نمود. با استفاده از روابط (۵-۲۵) و (۵-۲۹) مقادیر ξ و η در نقطه ای مانند P به صورت ذیل بدست می آیند:

$$\eta(\phi_P,\lambda_P) = \frac{-1}{R\cos\phi_P}\left.\frac{\partial N}{\partial\lambda}\right|_P \quad \text{و} \quad \xi(\phi_P,\lambda_P) = \frac{-1}{R}\left.\frac{\partial N}{\partial\phi}\right|_P \qquad (۹٦-۳)$$

که اگردر روابط فوق مقدار N را از فرمول استوکس (۳-۸٦) قرار دهیم:

$$\xi(\phi_P,\lambda_P) = \frac{-1}{4\pi\gamma_0}\oiint_{geoid}\Delta g(\phi,\lambda)\left.\frac{\partial S(\psi)}{\partial\phi}\right|_P d\mathcal{E} \qquad (۹۷-۳)$$

$$\eta(\phi_P,\lambda_P) = \frac{-1}{4\pi\gamma_0\cos\phi_P}\oiint_{geoid}\Delta g(\phi,\lambda)\left.\frac{\partial S(\psi)}{\partial\lambda}\right|_P d\mathcal{E} \qquad (۹۸-۳)$$

مشتقات تابع استوکس در روابط فوق به راحتی توسط قاعده زنجیره ای محاسبه می شوند:

$$\left.\frac{\partial S(\psi)}{\partial\phi}\right|_P \doteq \frac{\partial\psi}{\partial\phi_P}\frac{dS(\psi)}{d\psi} \quad \text{و} \quad \left.\frac{\partial S(\psi)}{\partial\lambda}\right|_P \doteq \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_P}\frac{dS(\psi)}{d\psi} \qquad (۹۹-۳)$$

و از طرفی :

$$\cos\psi = \sin\phi_P\sin\phi + \cos\phi_P\cos\phi\cos(\lambda-\lambda_P) \qquad (۱۰۰-۳)$$

---

29 Earth Geopotential Mode 1996

30 (US) National Imagery and Mapping Agency (وابسته به وزارت دفاع آمریکا)

31 (US) National Aeronautics and Space Agency

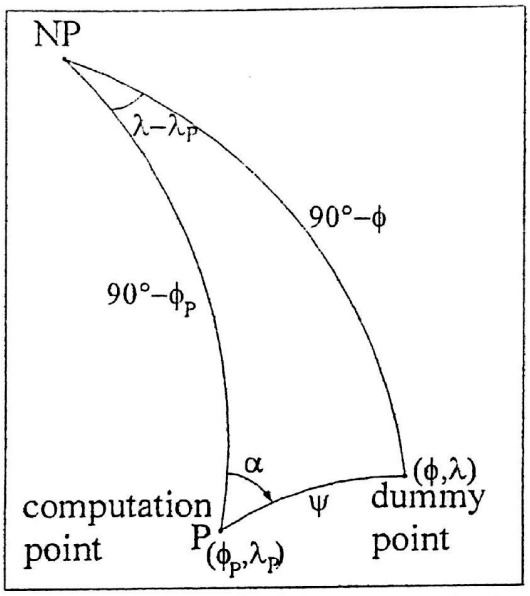
32 Vening Meinesz formula

اگر از طرفین رابطه (۳-۱۰۰) نسبت به ϕ_P و λ_P مشتق بگیریم :

$$-\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\phi_P}=\cos\phi_P\sin\phi-\sin\phi_P\cos\phi\cos(\lambda-\lambda_P) \qquad (۱۰۱-۳)$$

$$-\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_P}=\cos\phi_P\cos\phi\sin(\lambda-\lambda_P) \qquad (۱۰۲-۳)$$

اگر به مثلث کروی در شکل ذیل توجه کنیم (به اقتباس از شکل ۳-۱۳) :



شکل (۵-۱۳) : مثلث کروی و آزیموت dummy point

مطابق شکل فوق با استفاده از رابطه پنج جزئی بر روی مثلث کروی :

$$\sin\psi\cos\alpha=\sin(90^\circ-\phi_P)\cos(90^\circ-\phi)-\cos(90^\circ-\phi_P)\sin(90^\circ-\phi)\cos(\lambda-\lambda_P)$$

یا :

$$\sin\psi\cos\alpha=\cos(\phi_P)\sin(\phi)-\sin(\phi_P)\cos(\phi)\cos(\lambda-\lambda_P) \qquad (۱۰۳-۳)$$

و همچنین با استفاده از قضیه سینوسها بر روی مثلث کروی شکل (۵-۱۳) :

$$\sin\psi\sin\alpha=\cos\phi\sin(\lambda-\lambda_P)\Leftarrow\frac{\sin\psi}{\sin(\lambda-\lambda_P)}=\frac{\sin(90^\circ-\phi)}{\sin\alpha} \qquad (۱۰٤-۳)$$

با جایگذاری (۳-۱۰۳) و (۳-۱۰٤) در روابط (۳-۱۰۱) و (۳-۱۰۲) نتیجه ذیل عاید می گردد:

$$-\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\phi_P}=\sin\psi\cos\alpha\Rightarrow\frac{\partial\psi}{\partial\phi_P}=-\cos\alpha \qquad (۱۰۵-۳)$$

$$-\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_P}=\cos\phi_P\sin\psi\sin\alpha\Rightarrow\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_P}=-\cos\phi_P\sin\alpha \qquad (۱۰٦-۳)$$

با جانشینی روابط فوق در (۳-۹۹) و سپس (۳-۹۸) و (۳-۹۷) :

$$\boxed{\begin{Bmatrix}\xi(\phi_P,\lambda_P)\\ \eta(\phi_P,\lambda_P)\end{Bmatrix}=\frac{1}{4\pi\gamma_0}\iint_{geoid}\Delta g(\phi,\lambda)\begin{Bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{Bmatrix}\frac{dS(\psi)}{d\psi}\,d\sigma} \qquad (۱۰۷-۳)$$

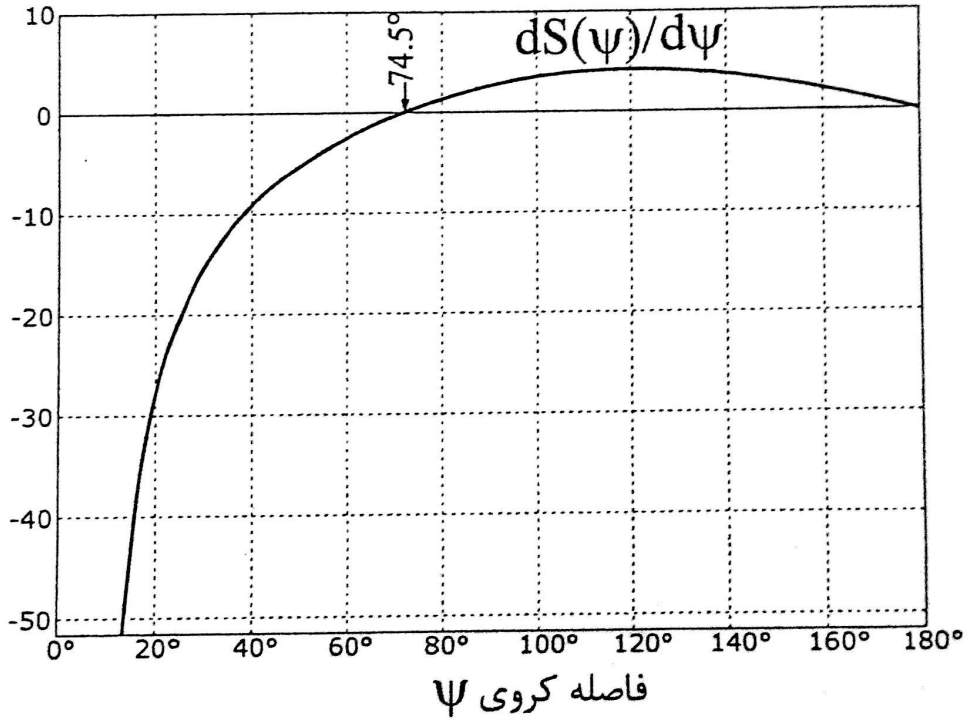
رابطه فوق اولین بار توسط یک ژئوفیزیکدان هلندی به نام ونینگ_ مینز بدست آمده است و بنام وی خوانده می شود که به کمک این رابطه با استفاده از مشاهدات انامولی جاذبه، مولفه های انحراف قائم تعیین می گردند.

مشتق تابع استوکس $\frac{dS(\psi)}{d\psi}$ که بنام تابع ونینگ_ مینز شناخته می شود به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{dS(\psi)}{d\psi}=\frac{-\cos\psi}{2\sin^2(\frac{1}{2}\psi)}+8\sin\psi-6\cos(\frac{1}{2}\psi)-3\frac{1-\sin(\frac{1}{2}\psi)}{\sin\psi}+3\sin\psi\ln\left(\sin(\frac{1}{2}\psi)+\sin^2(\frac{1}{2}\psi)\right)$$

(۱۰۸-۳)

تابع فوق در فاصله $0<\psi\le\pi$ دارای رفتاری مانند شکل ذیل (۵-۱٤) است :



شکل (۵-۱٤) : کرنل ونینگ - مینز

روش حل انتگرال ونینگ _ مینز نظیر انتگرال استوکس است و یکی از نکات قابل توجه در مورد کرنل ونینگ _ مینز، وجود singularity (مخرج صفر) در نقطه محاسبه به ازای $\psi=0$ می باشد و در اینجا حتی با تغییر سیستم مختصات به قطبی، فقط یک درجه از singularity از بین می رود. نکته دیگر در مورد تاثیر آزیموت (α) در فرمول (۳-۱۰۷) است که باعث می شود برای محاسبه ξ تاثیر اناملی نقاطی که در آزیموت های 90° و 270° قرار می گیرند، صفر شود و همینطور برای محاسبه η تاثیر اناملی نقاطی که در آزیموت های 0° و 180° قرار می گیرند، صفر شود به همین دلیل در موقع شبکه بندی (نظیر شکل ۵-۸) می توان ابعاد سلولهائی را که حول و حوش این آزیموت ها قرار می گیرند بزرگ گرفت زیرا که تراکم سلولها در این نواحی هیچگونه تاثیری در بهبود دقت محاسبه نخواهد داشت.

۶. ثقل سنجی[1]

در فصل قبل با کمیتهای اصلی میدان ثقل زمین و روشهای تعیین آنها آشنا شدیم و ملاحظه گردید که می توان با معلوم بودن Δg بر روی ژئوئید، N و همینطور ξ و η را تعیین نمود. دو فرض را در نظر گرفتیم اولا مشاهدات ما که از نوع Δg هستند بر روی ژئوئید معلوم هستند و ثانیا از اثر اجرام بالای ژئوئید (توپوگرافی مابین ژئوئید و سطح طبیعی زمین) صرفنظر کردیم. مسلما خود Δg را نمی توان مشاهده کرد و آنچه که قابل مشاهده است g می باشد و البته نه بر روی ژئوئید این کمیت بر روی زمین اندازه گیری می شود. مطالب این فصل به دو بخش کلی تقسیم می شوند ابتدا با روشهای مهم و مرسوم انتقال g از روی سطح طبیعی زمین به روی ژئوئید آشنا می شویم ودر واقع تصحیحاتی را بدست می آوریم که با اعمال آنها به g در روی زمین g_P بدست می آید و همچنین سعی می کنیم تاثیر توپوگرافی ما بین ژئوئید و سطح طبیعی زمین را در نظر بگیریم آنگاه با روشهای اندازه گیری شتاب ثقل زمین و همینطور دستگاههای اندازه گیری شتاب ثقل آشنا خواهیم شد.

۶. ۱. تصحیح هوای آزاد[2]

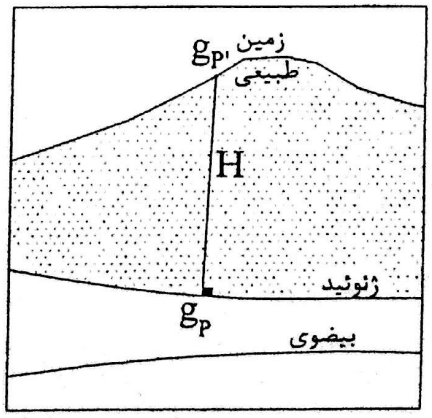
بطور کلی تغییرات g برروی سطح زمین ناشی از سه عامل می تواند باشد :

الف- اختلاف ارتفاع بین نقاط : $g = g(h)$

ب- عرض ژئودتیک نقاط (زیرا که زمین متقارن نیست و شتاب ثقل آن در قطبین بیش از استواست و همینطور با نزدیک شدن به قطبین شتاب گریز از مرکز کاهش می یابد) : $g = g(\phi)$

ج- تغییرات چگالی و توزیع نامنظم جرم درون زمین : $g = g(\rho(\bar{r}))$

دو مورد الف و ب قابل پیش بینی و اندازه گیری هستند ولی مورد سوم به دلیل عدم اطلاع ما از نحوه دقیق توزیع جرم در زمین قابل پیش بینی نیست و فقط با اندازه گیری و انجام مشاهدات ثقل سنجی می شود تغییرات واقعی آن را بررسی نمود. ساده ترین فرض برای انتقال $g_{P'}$ از سطح زمین به روی ژئوئید (شکل ذیل) اینست که فرض کنیم در فاصله بین ژئوئید و سطح زمین هیچ چیزی وجود ندارد و فقط تاثیر ارتفاع H را در نظر بگیریم. یعنی فرض می کنیم ناحیه مابین زمین و ژئوئید یک فضای توخالی و عاری از هرگونه جرمیست و بنابراین اختلاف بین $g_{P'}$ و g_P فقط ناشی از اختلاف ارتفاع بین این دو و همچنین عرض ژئودتیک خواهد بود.



شکل ۶-۱ : انتقال مشاهدات جاذبه از سطح زمین به روی ژئوئید

---

[1] Gravimetry
[2] Free air reduction

اگر میدان جاذبه زمین را با تقریب کروی در نظر بگیریم :

$$g \doteq \frac{GM}{r^2} - \omega^2 r \cos^2\phi \qquad (۱-٦)$$

با مشتق گیری از رابطه فوق نسبت به r نتیجه مقابل بدست می آید: $\frac{\partial g}{\partial r} \doteq \frac{-2GM}{r^3} - \omega^2 \cos^2\phi$ (۲-٦)

اگر در این رابطه به جای r شعاع متوسط زمین یعنی $R = \sqrt[3]{a^2 b}$ را قرار دهیم و مقادیر عددی GM و ω را نیز جایگزین کنیم آنگاه: $\boxed{\frac{\partial g}{\partial r} \doteq \frac{\partial g}{\partial H} \doteq (-0.3083 - 0.000532\cos^2\phi)\ \text{mGal/m}}$ (۳-٦)

همانطور که ملاحظه می گردد توسط رابطه فوق موفق شده ایم میزان تغییرات شتاب ثقل زمین را در اثر دو عامل ارتفاع و عرض ژئودتیک فرموله کنیم و البته از تغییرات ناشی از توپوگرافی صرفنظر کرده ایم. اگر در رابطه بالا مقدار متوسط 0.6 را برای $\cos^2\phi$ در نظر بگیریم آنگاه : $\boxed{\frac{\partial g}{\partial H} \doteq -0.3086\ \text{mGal/m}}$ (٤-٦)

رابطه فوق بدین معناست که به ازای تغییر ارتفاعی به میزان ۱ متر در جهت بالا (جهت مثبت H) به میزان -0.3086 میلی گال کاهش در شتاب ثقل واقعی زمین خواهیم داشت. در تصحیح توپوگرافی می خواهیم از سطح زمین به طرف پائین برویم بنابراین میزان تصحیح خلاف جهت رابطه (٤-٦) است و علامت آن عوض می شود: $\boxed{\delta g^{FA} = 0.3086H}$ (٥-٦) که دراین رابطه δg^{FA} تصحیح هوای آزاد نام دارد و اندازه g^{FA} بر روی ژئوئید از این رابطه حساب می شود: $g_P^{FA} = g_{P'} + \delta g^{FA} = g_{P'} + 0.3086H$ و در نتیجه انامولی هوای آزاد برابر با مقدار مقابل است: $\Delta g^{FA} = g_{P'} - \gamma_Q + 0.3086H$ (٦-٦)

برای مثال فرض کنید مقدار شتاب ثقل اندازه گیری شده برای نقطه ای بر روی سطح زمین به اندازه $g = 980234\ \text{mGal}$ باشد و ارتفاع ارتومتریک این نقطه $H = 1852m$ باشد، آنگاه :

$g^{FA} = 980234 + 0.3086 \times 1852 = 980805.5\text{mGal}$ خواهد بود.

٦. ۲. تصحیح صفحه ای بوگه[3]

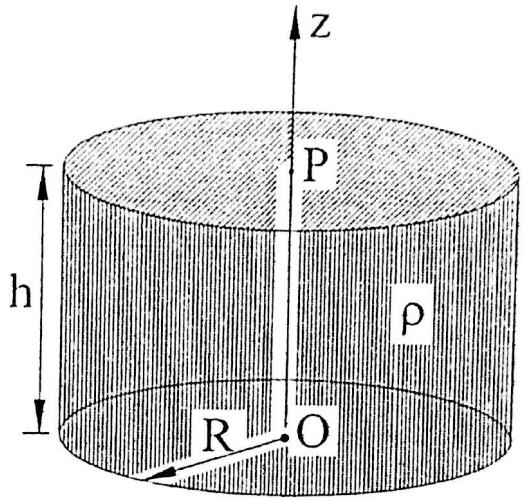
در قرن هجدهم (۱۷٤۹) فرانسویان یک اندازه گیری تاریخی را کشور پرو انجام دادند که در این سفر ژئودزینی بنام پیر بوگه (۱۷۵۸-۱٦۹۸) متوجه یک نوع ارتباط بین تغییرات جاذبه و توپوگرافی کوههای آند در آمریکای جنوبی شد و در این ارتباط مطالعاتی انجام داد که نتیجه کارهای او منجر به ابداع تصحیحی شد که بنام وی خوانده می شود. تصحیح بوگه بر دو نوع است : الف – تصحیح صفحه ای یا پلیت بوگه

ب- تصحیح توپوگرافی بوگه

واضح است که حذف اثر توپوگرافی مابین سطح زمین و ژئوئید کار منطقی نیست و با ید اثر آن لحاظ گردد ساده ترین فرض اینست که توپوگرافی اطراف نقطه را لایه ا ی فرض کنیم به عبارت دیگر آنرا متشکل از بینهایت صفحه بر روی هم به ضخامت کلی H در نظر بگیریم که به آن صفحه بوگه گفته می شود. و این بدان معنا نیست که ما برای کل منطقه محاسبه یک صفحه را فرض کنیم بلکه برای هر یک نقطه یک صفحه بوگه جداگانه تعریف

[3] Bouguer plate reduction

می شود. برای محاسبه تصحیح صفحه ای بوگه یک جسم استوانه ای به ارتفاع h و شعاع قاعده R و چگالی یکنواخت ρ در نظر می گیریم و شتاب جاذبه آنرا در نقطه ای مانند P در شکل (۶-۲) حساب می کنیم.



Bouguer plate

شکل (۶-۲) : صفحه بوگه

با استفاده از مطالبی که در فصل ۲ خوانده ایم می توان با استفاده از رابطه (۲- ۱۶) پتانسیل جاذبه را در نقطه P با استفاده از یک سیستم مختصات استوانه ای به مرکز O در شکل فوق ، به صورت ذیل محاسبه کرد:

$$V(\bar{\mathbf{r}}) = G\rho \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{h} \int_{r=0}^{R} \frac{d\mathcal{B}}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|} \quad (۷-۶)$$

که با حل انتگرال فوق و سپس مشتق گیری از تابع پتانسیل نهایتا شتاب جاذبه در نقطه P با استفاده از رابطه زیر بدست می آید:

$$a_P = -2\pi G\rho \,(R + h - \sqrt{R^2 + h^2}) \quad (۸-۶)$$

و در صورتی که در رابطه فوق مقدار زیر رادیکال را به سری توانی بسط دهیم :

$$a_P = -2\pi G\rho \,(R + h - R(1 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{R^2} + ...)) = -2\pi G\rho h \,(1 - \frac{h}{2R} - ...) \quad (۹-۶)$$

اگر شعاع جسم استوانه ای نشان داده شده در شکل (۶-۲) را بینهایت فرض کنیم :

$$\boxed{\delta g^{BP} = \lim_{R\to\infty} a_P = \lim_{R\to\infty} -2\pi G\rho h \,(1 - \frac{h}{2R} - ...) = -2\pi G\rho h} \quad (۱۰-۶)$$

در واقع با بینهایت فرض کردن R، استوانه نشان داده شده در شکل تبدیل به صفحه می شود و در واقع به این طریق تاثیر جاذبه ناشی از توپوگرافی که به صورت لایه ای به ضخامت h باشد، بدست می آید در رابطه (۶-۱۰) δg^{BP} عبارتست از تصحیح صفحه ای (پلیت) بوگه که مقدار گذاری G و در نظر گرفتن $\rho = 2670\ \mathrm{kg/m^3}$ این تصحیح به ازای هر یک متر ($h = 1\mathrm{m}$) ارتفاع توپوگرافی بالای ژئوئید مقداری برابر $\frac{\partial g^{BP}}{\partial h} = -0.1119\mathrm{mGal/m}$ خواهد داشت و بنابراین میزان کل تصحیح برای نقطه ای با ارتفاع ارتومتریک H برابر است با : (۶-۱۱) $\boxed{\delta g^{BP} = -0.1119H}$ که در آن میزان تصحیح بر حسب میلی گال بدست می آید.

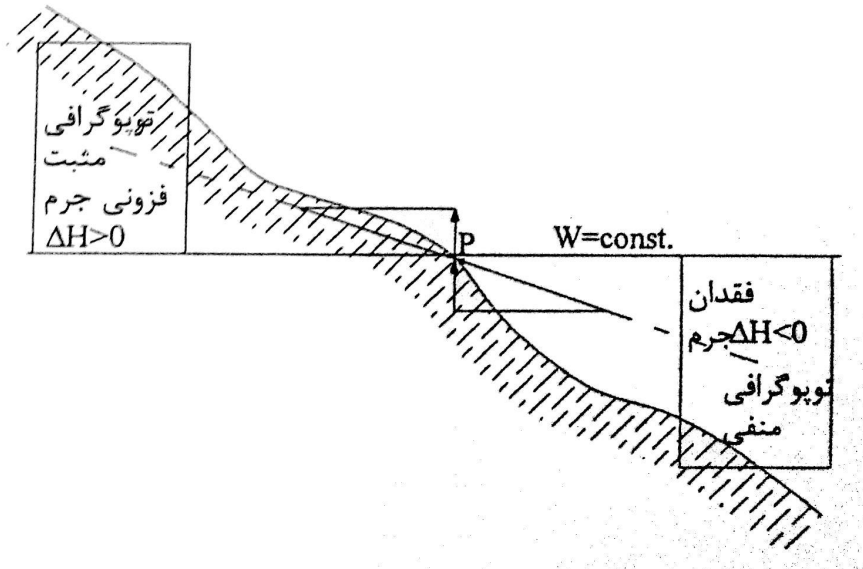
مجموع تصحیحات هوای آزاد و صفحه ای بوگه را تصحیح غیر کامل و یا تصحیح ساده بوگه می گویند.

$$\Delta g^{BO} = g_P - \gamma_Q + 0.3086H - 0.1119H = g_P - \gamma_Q + 0.1967H \qquad (۱۲-۶)$$

که در رابطه فوق $\delta g^{BP} + \delta g^{FA} = 0.1967H$ بر حسب میلی گال تصحیح ساده بوگه است.

۶. ۳. تصحیحات توپوگرافی[4]

در بخش های قبل ملاحظه کردید که میزان تصحیحات اعمال شده به شتاب ثقل اندازه گیری شده در سطح زمین فقط به ارتفاع ارتومتریک نقطه اندازه گیری منتسب گردید (۶-۱۲) و در آن صورت فرقی نمی کند که وضعیت توپوگرافی اطراف نقطه اندازه گیری چگونه باشد و البته مسلما به دلیل تاثیر با اهمیتی که توپوگرافی منطقه دارد باید این مسئله را درنظر گرفت. در مشاهداتی که بوگه در پرو انجام داد متوجه وجود یک مسئله جالب شد وآن این بود که برای دو نقطه که یکی واقع در دشت و دیگری واقع در کوهستان بودند در عین اینکه ارتفاع ارتومتریک آنها با هم برابر بود ولی شتاب جاذبه در کوهستان کمتر از مقدار آن در دشت بود و این مسئله توجه او را به این واقعیت واداشت که توپوگرافی تاثیر مستقیمی بر روی انامولی جاذبه دارد. به شکل (۶-۳) توجه کنید نقطه P را در یک ناحیه کوهستانی انتخاب کرده ایم .



شکل (۶-۳) : تاثیر توپوگرافی بر روی جاذبه مشاهده شده

وجود جرم در بالای نقطه P باعث می شود یک بردار جاذبه از طرف این جرم بوجود بیاید که دارای مولفه ای در خلاف جهت شتاب ثقل زمین است و این باعث کاهش g در P می شود و برای رفع این اثر باید تصحیحی به شتاب ثقل در P اعمال شود که دارای علامت مثبت می باشد و از سوی دیگر در پائین این نقطه فقدان جرم وجود دارد اگر جرم وجود می داشت مولفه ای بوجود می آمد که شتاب ثقل را در P تقویت می کرد و چون این مولفه وجود ندارد بنابراین فقدان جرم مجددا باعث کاهش g در P می شود و برای رفع اثر آن باید تصحیحی با علامت

---

[4] Topographical corrections

مثبت به g در P اعمال شود. پس همواره شتاب ثقل در دشت بیشتر از کوهستان است و فرقی نمی کند چه تپه داشته باشیم وجه دره تصحیح توپوگرافی همواره با علامت مثبت ظاهر می گردد به همین جهت تصحیح توپوگرافی بوگه دارای ماهیتی سیستماتیک می باشد و همانند خطای سیستماتیک بر روی مشاهدات ثقل سنجی تاثیر می گذارد زیرا که علامت آن همواره در یک جهت است و ماهیتی قابل پیش بینی و برآورد دارد.

تاثیر توپوگرافی زمین از روی اطلاعاتی که در مورد پستی و بلندی زمین (H_Q) داریم، محاسبه می گردد این اطلاعات می تواند برای مثال از یک مدل رقومی زمین[5] (DTM) بدست بیاید :

$$\delta g^T = \iint_{x\ y} \int_{z=H_P}^{H} \frac{z - H_P}{r^3} \rho(x, y, z) dx dy dz \qquad (۱۳-۶)$$

که در رابطه فوق r فاصله نقطه محاسبه P از کلیه نقاط زمینی اطراف است. برای نقاط زمینی واقع در بالای P همان چگالی $\rho = 2670\ \mathrm{kg/m^3}$ استفاده می شود و برای نقاط پائین دست P چگالی با علامت منفی استفاده می شود زیرا که این مناطق دارای کمبود و فقدان جرم هستند. البته برای محاسبه تصحیح توپوگرافی روشها و فرمولهای متعددی وجود دارد که دراینجا یکی از ساده ترین روشها ذکر گردید حسن این رابطه دراینست که به ما اجازه می دهد در صورت وجود اطلاع از چگالی پوسته زمین در ناحیه محاسبه از چگالی های متفاوت برای قسمت های مختلف استفاده کنیم. نهایتا:

$$\boxed{\Delta g = g_{P'} - \gamma_Q + 0.1967H + \delta g^T} \qquad (۱۴-۶)$$

۶. ٤. مشاهدات ثقل سنجی

مشاهدات ثقل سنجی را می توان از دیدگاههای مختلفی تقسیم بندی کرد. از نقطه نظر محل اندازه گیری شتاب ثقل، این مشاهدات را به دسته های ذیل تقسیم بندی می کنند:

۱- مشاهدات ثقل سنجی زمینی (در سطح زمین انجام می شود)

۲- مشاهدات ثقل سنجی دریائی (توسط کشتی و در روی دریا انجام می شود)

۳- مشاهدات ثقل سنجی زیر دریائی (توسط زیر دریائی ها و یا دستگاههائی که توسط کشتی به کف دریا منتقل می شوند انجام می شود)

٤- مشاهدات ثقل سنجی هوائی (توسط هواپیما یا هلیکوپتر انجام می گیرد)

و از نقطه روشهای اندازه گیری این مشاهدات را می توان به دو دسته تقسیم نمود :

الف- اندازه گیری شتاب ثقل مطلق

ب- اندازه گیری شتاب ثقل نسبی

که درروش اول مقدار خود g را مستقیما اندازه گیری می کنند که دستگاههای مورد استفاده در این روش به دو نوع دستگاههای آونگ دار و دستگاههای سقوط آزاد تقسیم بندی می شوند و در بخش بعدی راجع به آنها توضیح خواهیم داد. در روش دوم که بیشتر در ژئودزی استفاده می شود اختلاف بین شتاب ثقل نقاط اندازه گیری می شود همانگونه که در ترازیابی اختلاف ارتفاع را اندازه می گیریم در اینجا هم اختلاف g یعنی $Dg = g_2 - g_1$ اندازه گیری می شود. پس باید مقدار g مطلق برای یک نقطه مبنا معلوم باشد و با اندازه گیری اختلاف شتاب ثقل

---

[5] Digital Terrain Model

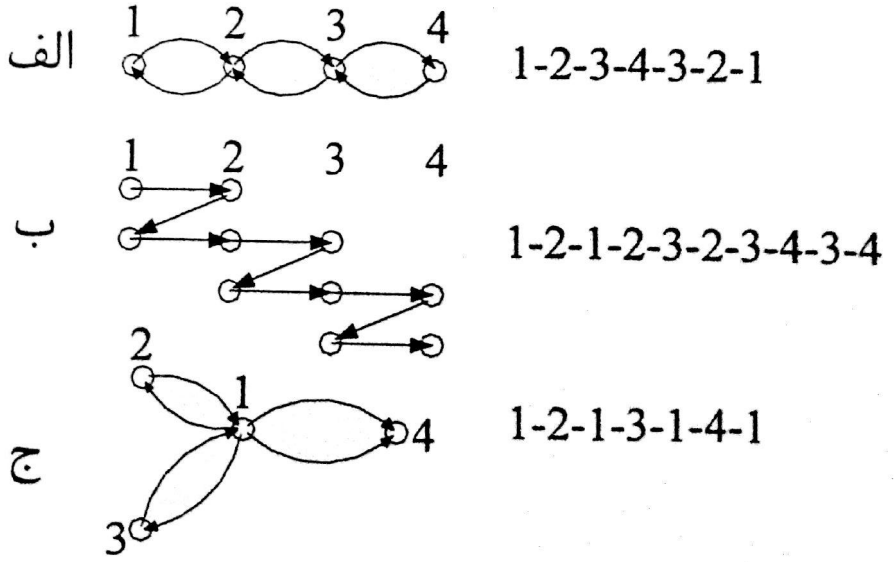
نقاط در یک شبکه ثقل سنجی با انجام سرشکنی مقادیر g برای تک تک نقاط محاسبه می گردد. دستگاههائی که برای انجام این نوع مشاهدات به کار می روند بر اساس تغییر طول یک فنر که وزنه ای بدان متصل است عمل می کنند بدین معنی که اگر شتاب ثقل از یک نقطه به نقطه دیگر افزایش یابد طول فنر نیز افزایش پیدا می کند و اگر طول فنر کاهش یافت به معنی کاهش شتاب ثقل نقطه دوم است. در این روش سه اشکال اساسی وجود دارد: ۱- عدم توانائی اندازه گیری شتاب ثقل مطلق به گونه ای که هر خطای سیستماتیکی که در شتاب ثقل نقطه مبنا وجود داشته باشد به کلیه نقاط منتقل خواهد شد. ۲- نیاز دستگاههای مورد استفاده در این روش به انجام کالیبراسیونهای مکرر ۳- وجود دائمی و غیر قابل انکار یک دریفت (drift) یا تغییر حالت در آنها که ناشی از کهنه شدن و تغییر ثابت فنر می باشد.

روشهای انجام مشاهدات ثقل سنجی نیز متفاوت با یکدیگر می باشند و عبارتند از :

الف – روش پروفیلی (شکل ٦-٤ _ الف) : در این روش مشاهدات شبیه به تراز یابی یکبار به صورت رفت و بار دیگر در برگشت انجام می شوند در این روش هریک از نقاط به جز نقطه انتها دو بار اندازه گیری می شوند و فاصله زمانی نسبتا زیادی بین مشاهدات رفت و برگشت رعایت می شود.

ب- روش پله ای (شکل ٦-٤ _ ب) : در این روش همه نقاط به جز نقاط انتهائی ۳ بار اندازه گیری می شوند و اختلاف به اندازه گیری های مجدد در این روش کوتاه است. خطای سیستماتیک دریفت در این روش به صورت غیر خطی می باشد.

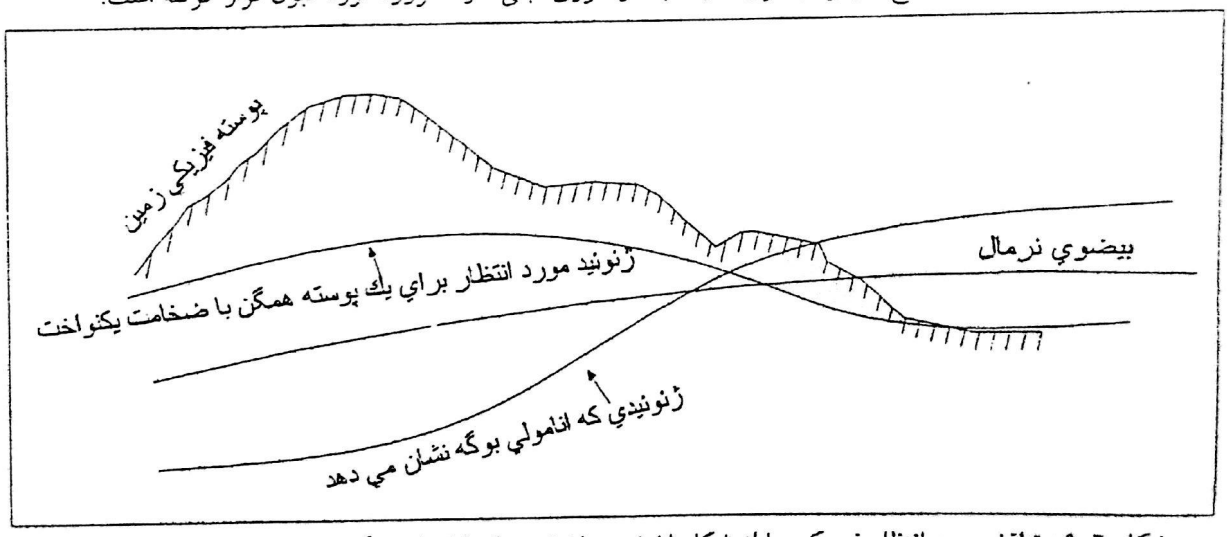
ج- روش ستاره (شکل ٦-٤ _ ج) : در این روش اندازه گیری ها نسبت به یک نقطه مرکزی انجام می شوند و این کار برای تعیین دریفت انجام می شود. اشکال این روش در اینست که کمترین کنترل بر روی مشاهدات وجود دارد و وجود اشتباه در مشاهدات قابل تشخیص نیست زیرا که مشاهدات کنترلی نداریم.



شکل (٦-٤) : روشهای برداشت مشاهدات ثقل سنجی

٦. ٥. تصحیح ایزوستاتیک

هنگامی که انامولی بوگه در نواحی بزرگ محاسبه می گردد این مسئله کشف می گردد که انامولی های بوگه به طور کاملا سیستماتیک در اقیانوسها مقادیر مثبت بزرگی دارند و در کوهها مقادیر منفی بزرگی دارند. وجود چنین مقادیری عموما منجر به این می شود که در مناطق دریائی اندازه ارتفاع ژئوئید (N) مثبت شود و در مناطق کوهستانی مقدار آن منفی باشد. این کشف با انتظارات مبتنی بر اصول فیزیکی ما متناقض است! اگر پوسته زمین همگن (یا هم چگال) می بود و همچنین کلفتی آن در همه جا یکسان بود انتظار داشتیم که شکل ژئوئید تا حدی از شکل هندسی زمین تبعیت کند یعنی در مناطق کوهستانی ژئوئید در بالای بیضوی قرار بگیرد و در مناطق دریائی ژئوئید در زیر بیضوی واقع شود (به شکل ٦-٩ توجه کنید). تشریح کشف این مسئله در تئوری ایزوستازی[6] مطرح می گردد. ایزوستازی در واقع تئوری تعادل هیدروستاتیکی پوسته زمین می باشد. برخی ایده اولیه ایزوستازی را به لئوناردو داوینچی[7] نسبت می دهند. اولین تئوری پردازی ریاضی راجع به ایزوستازی توسط پرت[8] (١٨٥٤) و ایری[9] (١٨٥٥) انجام شده است. پس از آن در سال ١٩٣١ ونینگ مینز تئوری خودش را در ارتباط با ایزوستازی ارائه نمود. روش وی شاید به دلیل اینکه واقع گرائی بیشتری نسبت به دو تئوری قبلی دارد امروزه مورد قبول قرار گرفته است.



شکل ٦-٩ : تناقض بین انتظار فیزیکی ما از شکل ژئوئید و ژئوئیدی که انامولی بوگه بدست خواهد داد.

---

[6] Isostasy
[7] Leonardo da Vinci
[8] J.M. Pratt
[9] G.B. Airy

۶. ۵. ۱ مدل و تئوری پرت :

مبنای ایده پرت آنست که پوسته زمین را به تعدادی از قطعات[10] با چگالی های متفاوت تقسیم کنیم. سپس این قطعات را به صورت شناور بر روی سطحی از ماگما که در عمق T قرار دارد، فرض می کنیم (شکل ۶-۱۰). به این سطح معمولا سطح تعادل[11] گفته می شود. این شرط را قائل می شویم که برای کلیه قطعات (یا ستونهای) مستقلی که فشار یکسانی را بر ماگما وارد می کنند، حاصلضرب $(T + h_i)\rho_i$ ثابت بماند:

$$(T + h_i)\rho_i = const$$

بنابراین برای ستونی با ارتفاع صفر $(h_i = 0)$ و چگالی متوسط ρ_0، می توان گفت: $T\rho_0 = const$

با این حساب چگالی هر ستون مستقل که به میزان متوسط h_i بالاتر از سطح دریا قرار گرفته است، تعیین می گردد:

$$\boxed{\rho_i = \rho_0 \frac{T}{T + h_i}} \qquad (۱۵-۶)$$

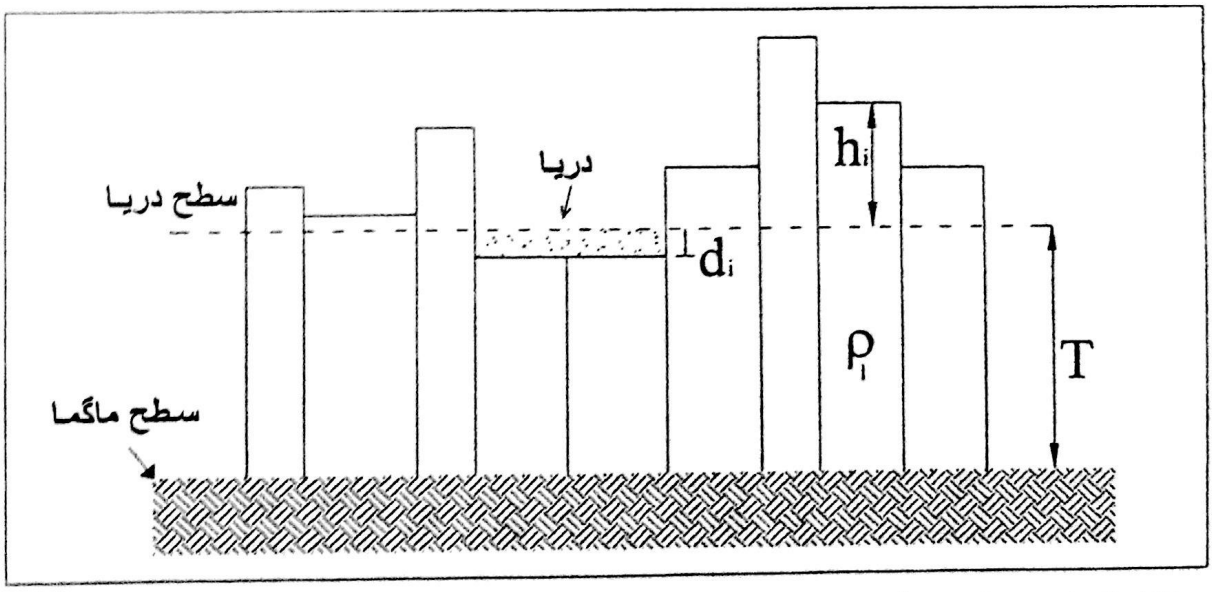
در رابطه فوق برای تعیین ρ_i باید مقادیر T و ρ_0 معلوم باشد و h_i قابل اندازه گیریست. مقدار T را معمولا حدود ۱۰۰ کیلومتر فرض می کنند و $\rho_0 = 2.67 gr/cm^3$ در نظر گرفته می شود. یعنی می توان با در دست داشتن ارتفاع متوسط هر قطعه از زمین از سطح دریا چگالی آنرا تقریب زد. اگر منطقه ای زیر اقیانوس را در نظر بگیریم، مجبور خواهیم بود که وزن آب بالای هر ستون را نیز در نظر بگیریم. اگر چگالی آب را با ρ_w نمایش دهیم (که معمولا $1.027 gr/cm^3$ فرض می شود)، و عمق متوسط پوسته قطعه زیر دریا را با d_i نشان بدهیم آنگاه با توجه به شکل (۶-۱۰) رابطه مقابل را خواهیم داشت:

$$(T - d_i)\rho_i + d_i\rho_w = T\rho_0 \qquad (۱۶-۶)$$

و سپس :

$$\boxed{\rho_i = \frac{T\rho_0 - d_i\rho_w}{T - d_i}} \qquad (۱۷-۶)$$

مدل پرت با مقداری اصلاحات توسط هایفورد[12] در سال ۱۹۱۲ بکار گرفته شد. وی از این مدل برای تعیین بهترین بیضوی برازش داده شده به ژئوئید (تا آن زمان) در منطقه آمریکای شمالی استفاده نمود.



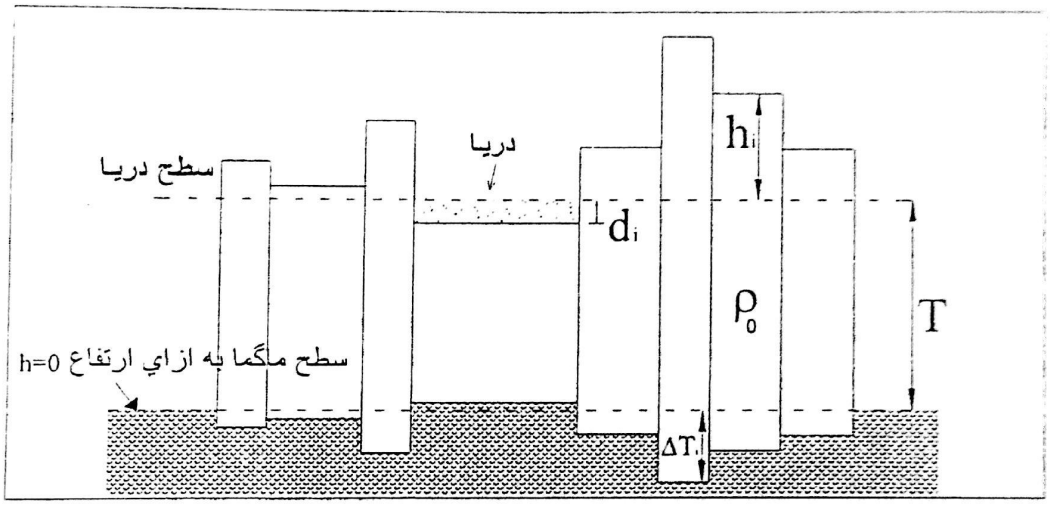
شکل ۶-۱۰ : ستونهایی با چگالی های مختلف که بر روی سطح صافی از ماگما قرار گرفته اند(تئوری پرت).

---

[10] Blocks
[11] Compensation level
[12] J.F. Hayford (1868-1925)

۶. ۵. ۲ مدل و تئوری ایری :

مدل ایری بر اساس این ایده شکل گرفته است که قطعات تشکیل دهنده پوسته زمین را مانند کوههای یخ غوطه ور در آب اقیانوس تصور کنیم (شکل ۶-۱۱) در مدل ایری بر خلاف تئوری پرت، فرض بر این است که کلیه این قطعات چگالی یکسانی دارند و اندازه این چگالی $\rho_0 = 2.67 gr/cm^3$ فرض می شود و از طرف دیگر فرض بر این است که این ستونها در عمق های متفاوتی از ماگما با توجه به ارتفاعشان قرار دارند و می دانید که ماگما ماده ای خمیری شکل و تغییر شکل دهنده است (مواد مذابی که از آتشفشانها خارج می شوند از جنس ماگما هستند). در واقع فرض می شود که یک تناسب مستقیم بین میزان فرو رفتگی یک ستون در ماگما با ارتفاع آن از سطح دریا وجود داشته باشد.

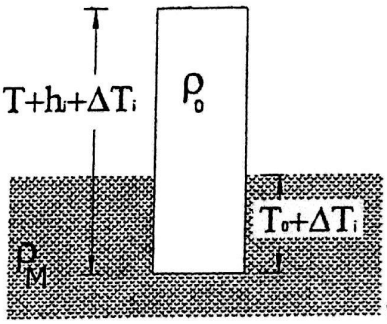


شکل ۶-۱۱ : فرضیه ایری در مورد تعادل هیدروستاتیک ماگما و پوسته زمین

بر اساس قانون ارشمیدس[۱۳] سطح تعادل ستونی با ارتفاع $T + h_i + \Delta T_i$ که به میزان $T_0 + \Delta T_i$ در ماگما فرو رفته باشد (شکل ۶-۱۲) هنگامی بدست می آید که رابطه ذیل بر قرار باشد:

$$(T + h_i + \Delta T_i)\rho_0 = (T_0 + \Delta T_i)\rho_M \quad (۱۸-۶)$$

در رابطه فوق ρ_M چگالی ماگما است و معمولا $3.27 gr/cm^3$ فرض می شود.



شکل ۶-۱۲

[۱۳] قانون ارشمیدس می گوید هر گاه جسمی وارد مایعی شود به اندازه وزن مایع هم حجم جسم از طرف مایع به جسم نیرو وارد می شود. بنابراین اگر مکعبی با چگالی ۲ گرم بر سانتی متر مکعب و وزن ۱۰۰ نیوتن را درون مایعی با چگالی ۱ گرم بر سانتی متر مکعب قرار دهیم و درون مایع آنرا وزن کنیم ملاحظه خواهیم کرد که عقربه ترازو عدد ۵۰ نیوتن را نشان می دهد.

بر اساس رابطه (۶-۱۸) اگر $h_i = 0$ باشد (در واقع برای ستونی که در سطح تراز با سطح دریا قرار دارد و بنابراین هیچ فرورفتگی هم در ماگما نخواهد داشت $\Delta T_i = 0$) نتیجه ذیل بدست می آید:

$$T\rho_0 = T_0\rho_M \quad (۱۹-۶)$$

و بنابراین: (۶-۲۰) $T_0 = T\dfrac{\rho_0}{\rho_M}$ و با جایگذاری در رابطه (۶-۱۸): $(h_i + \Delta T_i)\rho_0 = \Delta T_i\rho_M$ (۶-۲۱)

$$\boxed{\Delta T_i = \frac{\rho_0}{\rho_M - \rho_0}h_i = \frac{2.67}{3.27-2.67}h_i = 4.45h_i} \quad (۶-۲۲)$$

در مناطق اقیانوسی رابطه (۶-۱۸) به شکل زیر ظاهر می گردد:

$$(T - \Delta T_i - d_i)\rho_0 + d_i\rho_w = (T_0 - \Delta T_i)\rho_M \quad (۶-۲۳)$$

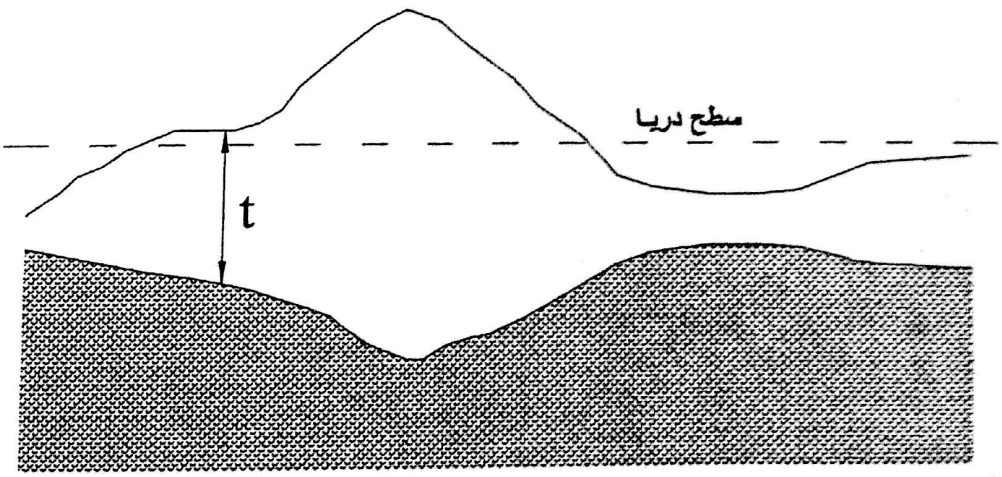
با جایگذاری (۶-۲۰) در عبارت فوق:

$$\boxed{\Delta T_i = \frac{\rho_0 - \rho_w}{\rho_M - \rho_0}d_i = \frac{2.67-1.027}{3.27-2.67}d_i = 2.73d_i} \quad (۶-۲۴)$$

بنابراین در مدل ایری تصور براین است که در مناطق اقیانوسی ضخامت پوسته کم و در مناطق کوهستانی ضخامت پوسته زیاد است و میزان عمق فرورفتگی در ماگما تابعی از توپوگرافی می باشد. اکنون تصور کنید که تمامی ستونهای تشکیل دهنده پوسته یکپارچه باشند، ضخامت پوسته بر طبق مدل ایری توسط رابطه ذیل بدست می آید (به شکل ۶-۱۳ توجه کنید):

$$t = \begin{cases} T + h + \Delta T = T + 5.45h \\ T - \Delta T - d = T - 3.73d \end{cases} \quad (۶-۲۵)$$

معمولا در رابطه فوق اندازه T بین ۳۰ تا ۵۰ کیلومتر فرض می شود. مدل ژئوفیزیکی ایری اولین بار توسط هایسکانن در ژئودزی فیزیک برای تصحیح ایزوستاتیک انامولی جاذبه بکار برده شده است.



شکل ۶-۱۳ : ضخامت پوسته زمین در مناطق کوهستانی و اقیانوسی براساس مدل ایری

٦. ٥. ٣ مدل و تئوری ونینگ مینز:

در مدلهائی که تاکنون ذکر شدند فرض می شود که قطعاتی (یا ستونهائی) مستقل داریم که می توانند بصورت مستقل از یکدیگر حرکت داشته باشند ولی بر مبنای تحقیقات ژئوفیزیکی مدارکی وجود دارد که نشان می دهد که کاملا اینطور نیست و مواردی وجود دارد که در این دو فرضیه در مورد آنها ساده انگاری شده است! این دلیلی برای ونینگ مینز بود که او را بر آن داشت تا مدلی دیگر برای پوسته زمین در نظر بگیرد. دراین مدل پوسته زمین بصورت یک لایه الاستیک همگن با ضخامتی متغییر تصور می شود که به آن *مدل منطقه ای* می گویند. ضخامت متوسط حدود ۳۰ کیلومتر فرض می شود. توصیف ریاضی این مدل بر اساس تئوری الاستیسیته است و مطلبی کاملا پیچیده و دشوار می باشد. به دلیل ساختار پیچیده ریاضی که مدل ونینگ مینز دارد معمولا در عمل به ندرت کسی به سراغ آن می رود. بر اساس دانش فعلی بشر پوسته زمین بصورت ترکیبی از این سه مدل از خود رفتار نشان می دهد. مطمئنا می توان گفت هم چگالی پوسته زمین متغییر است و هم ضخامت آن تغییر می کند بعلاوه اینکه رفتاری بصورت یک لایه دارای ساختار الاستیک نیز از خودش نشان می دهد. تا هنگامی که اطلاعات بیشتر و دقیق تری از سایر منابع علمی (مانند لرزه نگاری، جذر و مد زمین، زمین شناسی، تکتونیک و غیره ...) بدست نیاید، طراحی یک مدل کاملا واقعی مشکل خواهد بود. بعلاوه اینکه روند برقراری تعادل ایزوستاتیک همچنان ادامه دارد و باید آنرا بصورت یک فرآیند پویا و پیوسته تلقی نمود که حرکتهای پوسته نیز در آن مشارکت دارد.

٦. ٥. ٤ تصحیح و اناملی ایزوستاتیک:

برای به حساب آوردن ایزوستازی پوسته زمین[14] باید تصحیح بوگه را تغییر دهیم یا مجددا آنرا تعریف کنیم.

---

۱۴ بر اساس شناخت موجود، برای ناحیه ای که حدود ۹۰٪ از سطح زمین را در بر گرفته است پوسته در وضعیت تعادل ایزوستاتیک قرار دارد.