In The Name Of GOD

میکروژئودزی Micro geodesy

استاد محترم :

مهندس قره باغی

تهیه وتنظیم :

محمد سیاری کلجاهی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد بناب
عضو باشگاه پژوهشگران جوان و انجمن علمی ژئوماتیک
m.sayary@gmail.com

پاییز ۸۷

فهرست

۱. مقدمه

۲. مراحل انجام پروژه‌های نقشه‌برداری

۳. خصوصیات روش کمترین مربعات

۴. انواع *defect* ها

۵. انواع مجهولات در یک مدل ریاضی

۶. انواع مدل‌های ریاضی

۶,۱. به صورت کلی

۶,۲. انواع مدل‌های ریاضی از نظر تعداد کانسترینت *(constraint)*

۷. تعریف دیتوم به روش *Minimum – Constraint* برای شبکه

۷,۱. روش *Inner Constraint* (سرشکنی با کانسترینت‌های داخلی)

۷,۱,۱. *Inner Constraint* برای شبکه های مسطحاتی بوده (مختصات تمامی نقاط مجهول)

۷,۱,۲. ماتریس *Inner-Constraint* برای شبکه‌های یک بعدی (ارتفاعی)

۷,۲. خصوصیات جواب *Inner Constraint* نسبت به روش‌های دیگر تعریف سیستم مختصات

۸. طراحی شبکه

۸,۱. روشهای طراحی شبکه

۸,۱,۱. مقایسه دو روش سعی و خطا و روش تحلیلی

۸,۱,۲. روش سعی و خطا در طراحی شبکه‌های ژئودتیکی

۸,۲. مراتب طراحی شبکه

۸,۲,۱. طراحی مرتبه صفر *ZOD (Zero Order Design)*

۸,۲,۲. طراحی مرتبه یک*FOD (First Order Design)*

۸,۲,۳. طراحی مرتبه دو*SOD (Second Order Design)*

۸,۲,٤. طراحی مرتبه سه *TOD (Third Order Design)*

۸,۲,٥. طراحی ترکیبی *Comp*

۸,۳. عوامل تأثیرگذار روی مختصات نقاط

۹. معیارهای بهینگی طراحی شبکه

۹,۱. دقت

۹,۱,۱. استفاده از معیارهای کلی برای مقایسه دقت (استفاده از توابع اسکالر دقت)

۹,۱,۲. استفاده از معیارهای محلی برای مقایسه دقت (بیضی خطای مطلق و نسبی)

۹,۱,۳. استفاده از ماتریس محک برای مقایسه دقت شبکه‌ها

۹,۲. اعتماد پذیری (قابلیت اعتماد)

۹,۲,۱. اعتمادپذیری داخلی

۹,۲,۲. اعتمادپذیری خارجی

۹,۳. حساسیت *(Sensitivity)*

۱۰. شبکه‌های میکروژئودزی

۱۰,۱. انواع شبکه های میکروژئودزی

۱۰,۲. روشهای تعیین نقاط پایدار و ناپایدار

۱۰,۳. تعیین میزان جابجایی

۱۰,٤. آنالیز استرین جزئی:

۱۰,٤,۱. ماتریس های تغییر شکل

۱۰,٤,۲. تعریف استرین

۱۰,٤,۳. روشهای تعیین ماتریس استرین

میکروژئودزی

۱. مقدمه

سازه‌های بزرگ و حساس همچون سدها، نیروگاه‌ها و برجها از اهمیت بسیار بالائی برخوردار بوده و رفتار سنجی اینگونه سازه‌ها معمولا به دو صورت ژئوتکنیکی و ژئودتیکی (ژئودزی مهندسی) صورت می‌پذیرد. بدین لحاظ امروزه در کشورهای پیشرفته تقریبا هیچ سازهٔ بزرگی را نمی‌توان یافت که فاقد مشاهدات پایش پایداری باشد. در ایران نیز این موضوع همواره مد نظر قرار داشته، بطوری که امروزه همهٔ سدهای کشور دارای ابزارهای دقیق کنترل و مشاهدات ژئودزی مهندسی برای رفتارسنجی می‌باشند.

در روش ژئوتکنیکی، ابزارهای سنجندهٔ کشش، برش و انحراف *(tilt)* در داخل سازه در حین ساخت نصب گردیده و اطلاعات حاصل از این سنجنده‌ها بطور مستمر در حین و پس از بهره‌برداری از سازه به منظور کنترل پایداری مورد مطالعه قرار می‌گیرند. این ابزارها امکان کنترل درونی سازه را پدید می‌آورند. در روش ژئودتیکی، شبکه‌ای از نقاط بر روی بدنه و محیط اطراف سازه ایجاد و از طریق مشاهدات ژئودتیکی (عمدتا طول، زاویه و مختصات) در وهله‌های زمانی مختلف، رفتار سازه مورد پایش واقع می‌گردد. اینگونه مشاهدات امکان کنترل تغییر شکل بیرونی سازه را مهیا می‌سازند.

بکارگیری مشاهدات ژئودزی مهندسی به منظور رفتارسنجی خارجی سازه‌ها در سالهای اخیر خصوصا با افزایش دقت وسایل اندازه‌گیری، به ویژه *GPS*، از اهمیت و توجه بیش از پیش برخوردار گردیده است. *GPS* به علاوه می‌تواند بصورت چند آنتنی (یعنی یک گیرنده با چندین آنتن) نیز برای کنترل دقیق سازه‌ها، خصوصا پایش زاویه‌ای رفتار سازه، مورد استفاده قرار گیرد. از عمده‌ترین تحولات سالهای اخیر، بوجود آمدن امکان پایش پیوستهٔ سازه‌ها بصورت آنی و خودکار بوده که *GPS* در این میان سهم عمده‌ای داشته است. در رفتارسنجی سازه‌ها به کمک مشاهدات ژئودتیکی نوعا کار با ارائهٔ بردارهای جابجائی خاتمه یافته و مهندسین از طریق

تفسیر بردارهای جابجائی رفتار سازه را تحلیل می‌کنند. شکی نیست که تعبیر و تفسیر تغییر شکل سازه از طریق بردارهای جابجائی کاری دشوار بوده و نیازمند تجربهٔ عملی بسیار است .

۲. مراحل انجام پروژه‌های نقشه‌برداری

۱) شناخت مجهولات و کیفیت مورد نظر برای آنها $\left(\sum_{xx}, x\right)$

۲) تعیین مدل ریاضی (در این مرحله کلیه راههای ممکن برای رسیدن به مجهولات بررسی می‌شوند)

۳) *Pre analysis* (طراحی اولیه) در این مرحله راه‌حل بهینه برای تعیین مجهولات انتخاب می‌شود مثلاً

نوع دستگاه، چگونگی جمع‌آوری اطلاعات ...

راه‌حل بهینه به این معنی است که پنج عامل زیر را تأمین نماید

a) دقت بالا
b) زمان کم
c) هزینه کم
d) اعتماد پذیری بالا

۴) انجام مشاهدات و جمع‌آوری اطلاعات

۵) پردازش‌های قبل از سرشکنی روی مشاهدات (فیلتر کردن مشاهدات)

مشاهدات را از نظر موارد زیر تست می‌کنیم :

f) تصادفی بودن
g) نرمال بودن
h) وجود اشتباه
i) وجود فضای خطای سیستماتیک

نکته: در این مرحله مشاهداتی را می‌توان تست کرد که به صورت تکراری باشند.

۶) تشکیل مدل ریاضی و تعیین مجهولات و دقت مجهولات

۷) پردازش‌های بعد از سرشکنی: در این مرحله نتایج بدست آمده از مرحله سرشکنی مورد تست قرار می‌گیرند که آیا نتایج قابل قبول هستند یا خیر؟ (یکی از آزمون‌های بعد از سرشکنی تست فاکتور وریانس ثانویه می‌باشد.)

۸) ارائه نتایج: اگر نتایج در مرحله (۷) قابل قبول بود مستقیم از مرحله‌ی (۷) به مرحله‌ی (۸) می‌رویم و اگر غیرقابل قبول بود باید عاملی را که باعث غیرقابل قبول بودن نتایج مشاهدات شده است پیدا

کنیم و با توجه به نوع عامل باید به مرحله‌ی (۴) یا (۶) برویم و مراحل را تکرار کنیم.

۳. خصوصیات روش کمترین مربعات:

۱. جواب برآورده شده به این روش منحصر به فرد است.

۲. جواب برآورده شـده به این روش یک برآورد نااریب از جواب واقعی است اگر مشاهدات مورد استفاده عاری از خطای سیستماتیک و اشتباهات باشند.

۳. جواب برآورد شـده به روش کمترین مربعات، یک برآورد می‌نیمم وریانس از جواب واقعی اسـت اگر مشـاهدات عاری از خطای سیستماتیک و اشتباهات بوده و ماتریس وزن مشاهدات متناسب با عکس ماتریس واریانس و کوواریانس در نظر گرفته شود.

۴. تصـیحات برآورده شـده، مشاهدات به روش کمترین مربعات یک جواب با ماکزیمم احتمال از جواب واقعی اسـت اگر مشـاهدات عاری از خطای سـیسـتماتیک و اشـتباهات بوده و تابع توزیع مشاهدات نرمال باشد.

۵. $\frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{n-u}$ یک برآورد نااریب از مقیاس واقعی ماتریس وزن مشـاهدات می‌باشد. اگر مشاهدات عاری از خطای سیستماتیک و اشتباهات باشند.

۶. ماتریس وریانس کوریانس برآورد شـده مجهولات برآورد شده ($\hat{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}}$) به این روش یک برآورد نااریب از ماتریس وریانس کوواریانس واقعی اسـت اگر مشاهدات عاری از خطاهای سیستماتیک و اشتباهات باشند.

۴. انواع *defect* ها :

۱) *datum – defect (d – defect)* : هر گاه برای شبکه‌ای با توجه به مجهولات سیستم مختصات تعریف نشده باشد *d-defect* خواهیم داشت. *d-defect* باعث می‌شود مجهولات در شبکه غیرقابل برآورد باشند. اگر مجهولات مختصات باشند:

$\mathcal{D}$-۱ یک بعدی: نیاز به یک پارامتر برای تعریف سیستم مختصات داریم (انتقال در جهت ارتفاعی یا همان مقیاس)

$\mathcal{D}$-۲ دو بعدی: نیاز به چهار پارامتر برای تعریف سیستم مختصات داریم (انتقال در جهت x و y ، یک دوران، یک مقیاس)

$\mathcal{D}$-۳ سه بعدی: نیاز به هفت پارامتر برای تعریف سیستم مختصات داریم (انتقال در جهت x و y و z ، سه دوران و یک مقیاس) تعداد پارامترهای لازم برای تعریف سیستم مختصات، تعداد *d-defect* های ما می‌باشد.

۲) *configuration – defect (c-defect)*: اگر شکل شبکه ثابت نباشد و بتواند تغییر شکل بدهد *c-defect* خواهیم داشت. در حقیقت در حالتی که شبکه *c-defect* دارد مشاهدات برای حل تمام مجهولات کافی نیستند. تعداد پارامترهای لازم برای ثابت کردن شکل شبکه تعداد *c-defect* می‌باشد. وجود *c-defect* باعث می‌شود در یک مدل ریاضی مجهولات غیرقابل برآورد داشته باشیم.

۳) *ill conditioning defect (i-defect)*: اگر شبکه‌ای از لحاظ شکل دچار ضعف باشد این شبکه دچار *i-defect* خواهد بود. وجود *i-defect* باعث می‌شود به دلیل وجود خطا در مشاهدات مجهولات با خطای

زیادی محاسبه شوند. اگر مشاهدات بدون خطا باشند و یا به عبارت دیگر در فضای ریاضی باشند *i-defect* معنی ندارد. در *i-defect* شکل غیرقابل برآورد کردن را نداریم. شکل دقیق برآورد کردن را داریم. *i-defect* کاملاً در فضای فیزیکی مطرح می‌شود پس تعداد ندارد و تأثیری روی درجه آزادی ندارد.

معیاری را می‌توان برای هندسه شبکه (شکل شبکه) معرفی کرد. این معیار به عدد شرط *condition number* مشهور است.

خطای نسبی مجهولات : $\frac{\|\delta\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} = k\frac{\|\delta l\|}{\|l\|}$

k : هر چقدر k کوچکتر باشد تأثیری که خطای مشاهدات روی مجهولات دارد کمتر می‌شود.

در صورتی که تعداد معادلات و تعداد مجهولات با هم برابر باشند ← $k = \|A\|\|A^{-1}\|$

با استفاده از مقادیر ویژه داریم : ← $k = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}$

$\lambda_{\max}$ ← بزرگترین مقدار ویژه $\mathcal{A}$

$\lambda_{\min}$ ← کوچکترین مقدار ویژه $\mathcal{A}$

اگر تعداد معادلات و مجهولات با هم برابر نباشند از مقدار ویژه $\mathcal{A}^T\mathcal{P}\mathcal{A}$ استفاده می‌شود.

نکته: مقدار ایده‌آل k ، ۱ می‌باشد.

۵. انواع مجهولات در یک مدل ریاضی

۱- مجهولات قابل برآورد مجهولاتی هستند که با استفاده از مدل ریاضی و معادلات آن و بدون نیاز به اضافه کردن یا تعریف هیچ کمیت دیگری (قید یا شرط) بدست می‌آیند به عبارت دیگر به صورت ترکیب خطی از مشاهدات می‌توانند نوشته شوند.

۲- مجهولات غیرقابل برآورد: مجهولاتی می‌باشند که با استفاده از مدل ریاضی و معادلات آن بدست نمی‌آیند و برای برآورد آنها نیاز به اضافه کردن و یا تعریف کمیت‌های دیگری (قید یا شرط) می‌باشد.

اینگونه مجهولات به صورت ترکیب خطی از مشاهدات نمی‌توانند نوشته شوند.

کمیتی که باعث می‌شود در شبکه‌ای مجهولات غیرقابل برآورد وجود داشته باشد *defect* است (درجه آزادی فیزیکی).

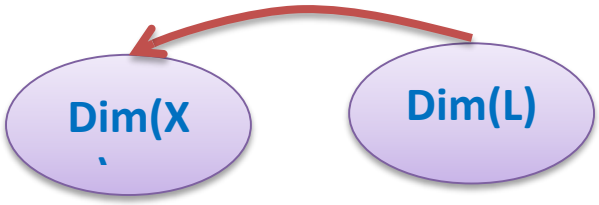
۶. انواع مدل‌های ریاضی

۶,۱. به صورت کلی :

a) مدل مستقیم *(direct model)* : مدلی است که نسبت به مجهولات صریح باشد و می‌تواند خطی یا غیرخطی باشد.

در این حالت مدل در فضای مجهولات نوشته می‌شود.

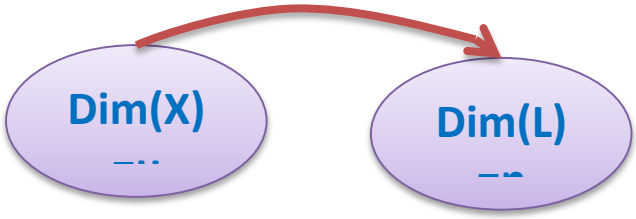
$$\begin{cases} x_{u(x)} = A_{u\times n} l_{n\times 1} & \text{خطي} \\ x_{u(x)} = f_{u\times 1}(l_{n\times 1}) & \text{غيرخطي} \end{cases}$$



b) مدل غیرمستقیم (معکوس) *(indirect model)* : مدل نسبت به مشاهدات صریح می‌باشد که می‌تواند خطی یا غیرخطی باشد.

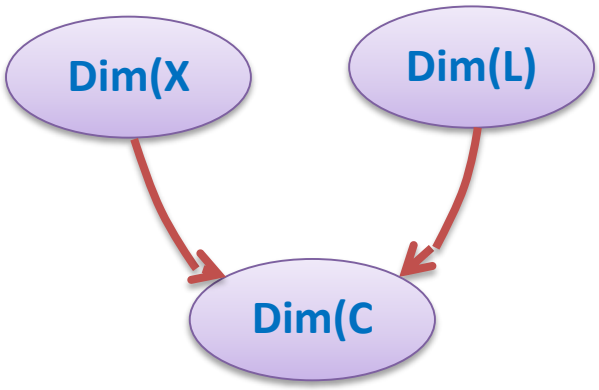
در این حالت مدل در فضای مشاهدات نوشته می‌شود.

$$\begin{cases} L_{n\times 1} = A_{n\times u} x_{u\times 1} & \text{خطي} \\ L_{n\times 1} = F_{n\times 1}(x_{u\times 1}) & \text{غيرخطي} \end{cases}$$



c) مدل ترکیبی: مدلی است نسبت به مجهولات صریح است و نه نسبت به مشاهدات که می‌تواند خطی یا غیرخطی باشد.

$$\begin{cases} A_{r\times u}x_{u\times 1}+B_{r\times n}l_{n\times 1}+c_{r\times 1}=0 & \text{خطي} \\ f_{r\times 1}\left(x_{u\times 1},l_{n\times 1}\right)=0 & \text{غيرخطي} \end{cases}$$



۶,۲. انواع مدل‌های ریاضی از نظر تعداد کانسترینت *(constraint)* :

۱- *Minimum Constraint*

۲- *Over Constraint*

کانسترینت روابطی هستند بین مجهولات که به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند:

۱- کانسترینت‌های مطلق شامل:

کانسترینت‌های ثابت

کانسترینت‌های تابعی

۲- کانسترینت‌های وزن‌دار

۷. تعریف دیتوم به روش *Minimum – Constraint* برای شبکه

می‌خواهیم بـه روش *Minimum – Constraint (M.C)* برای معـادلـات $f\left(\hat{x},\hat{l}\right)=0$ دیتوم تعریف کنیم. بـه عبارت دیگر سیستم مختصات ما در دستگاه $\begin{cases} f\left(\hat{x},\hat{l}\right)=0 \\ y\left(\hat{x}\right)=0 \end{cases}$ به روش *M.C* تعریف شده باشد.

$$\begin{cases} f_{r\times1}\left(\hat{x}_{u\times1},\hat{l}_{n\times1}\right)=0 \Rightarrow A_{r\times u}\delta\hat{x}_{u\times1}+B_{r\times n}\hat{V}_{n\times1}+W_{r\times1}=0 & u\le r\le n \\ g_{d\times1}\left(\hat{x}_{u\times1}\right)=0 \Rightarrow D_{d\times u}\delta\hat{x}_{u\times1}+W'_{d\times1}=0 & d\le u \end{cases}$$

$$rank(A)=u-(d+c)$$
$$r(B)=r$$
$$r(D)=d$$

فرض: سطرهای ماتریس $\mathcal{D}$ مستقل خطی از سطرهای ماتریس $\mathcal{A}$ می‌باشد.

فرض می‌کنیم $c = ۰$ باشد یعنی *c-defect* نداشته باشیم.

اگر بخواهیم معـادلات اول را به روش معادلات پارامتریک ترکیبی حل کنیم ماتریس $\left(A^TM^{-1}A\right)$ وارون‌پذیر نیســـت پس می‌خواهیم معـادلـاتی اضـــافه کنیم که کمبود رتبه‌ی ماتریس $\mathcal{A}$ را جبران کند. این معادلات $g(\hat{x})=0$ می‌باشد.

برای حل این معادلات از روش لاگرانژ تعمیم یافته استفاده می‌کنیم:

$$\phi=\hat{V}^TP\hat{V}-2\lambda_1^T\left(A\delta\hat{x}+B\hat{V}+W\right)-2\lambda_2^T\left(D\delta\hat{x}+W'\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\hat{V}}=0 \Rightarrow 2\hat{V}^TP-2\lambda_1^TB=0 \quad \Rightarrow \quad P\hat{V}-B^T\lambda_1=0 \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\hat{x}}=-2\lambda_1^TA-2\lambda_2^TD=0 \Rightarrow A^T\lambda_1+D^T\lambda_2=0 \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda_1}=-2\left(A\delta\hat{x}+B\hat{V}+W\right)^T=0 \Rightarrow A\delta\hat{x}+B\hat{V}+W=0 \qquad (۳)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda_2}=-2\left(D\delta\hat{x}+W'\right)^T=0 \Rightarrow D\delta\hat{x}+W'=0 \qquad (۴)$$

مقدار $\hat{V}$ را از رابطه اول محاســبه و در رابطه سوم جاگذاری کرده و مقدار λ_1 را یافته و در رابطه دوم جاگذاری می کنیم و در نهایت داریم :

$$=A^TM^{-1}\left(A\delta\hat{x}+W\right)+D^T\lambda_2=0$$
$$=A^TM^{-1}A\delta\hat{x}-A^TM^{-1}W+D^T\lambda_2=0$$

$$\begin{cases} -A^TM^{-1}A\delta\hat{x}+D^T\lambda_2=A^TM^{-1}W \\ D\delta\hat{x}+W'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^TM^{-1}A\delta\hat{x}-D^T\lambda_2=-A^TM^{-1}W \\ D\delta\hat{x}+W'=0 \end{cases}$$

$\mathcal{V}$ تا مجهول $\delta\hat{x}$ و d تا مجهول λ_2

$$\begin{bmatrix} A^T M^{-1} A_{u\times u} & D^T_{u\times 1} \\ D_{d\times u} & 0_{d\times d} \end{bmatrix}_{(u\times d)(u+d)} \begin{bmatrix} \delta x' \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^T M^{-1} W \\ -W' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta\hat{x} \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & R^T \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A^T M^{-1} W \\ -W' \end{bmatrix} \Rightarrow \delta\hat{x} = -QA^T M^{-1} W = -R^T W'$$

$$\begin{bmatrix} A^T M^{-1} A & D^T \\ D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & R^T \\ R & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{u\times u} & 0_{u\times d} \\ 0_{d\times u} & I_{d\times d} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A^T M^{-1} A Q + D^T R = I & (۱) \\ A^T M^{-1} A R^T + D^T S = 0 & (۲) \\ DQ = 0 & (۳) \\ DR^T = I & (۴) \end{cases}$$

۴ معادله سه مجهول بنابراین یکی از معادله‌ها به معادلات دیگر وابسته است.

برای حل این معادلات ماتریسی را تعریف می‌کنیم به نام ماتریس $\mathcal{H}$ به طوری که دارای شرایط زیر باشد:

$$\begin{cases} H_{d\times u} \\ rank(H) = d \\ AH^T = 0 \end{cases}$$

ابعاد ماتریس $\mathcal{H}$ با ابعاد ماتریس $\mathcal{D}$ برابر است.

دو طرف معادله‌ی اول را در ماتریس $\mathcal{H}$ ضرب می‌کنیم: $HA^T M^{-1} AQ + HD^T R = H$

$$\Rightarrow HD^T R = H \Rightarrow R = \left(HD^T\right)^{-1} H$$

این $\mathcal{R}$ که به دست آمد در معادله‌ی چهارم نیز صدق می‌کند بنابراین معادله چهارم وابسته به معادلات دیگر است. حال این $\mathcal{R}$ را در معادله‌ی (۲) جایگذاری می‌کنیم:

$$A^T M^{-1} AH^T \left(DH^T\right)^{-1} + D^T S = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} D^T S = 0 \\ , \ rank\left(D^T\right) = d \end{matrix}\right\} S = 0$$

$\mathcal{R}$ و S ای که بدست آوردیم در معادلات (۲) و (۴) صدق می‌کند و فقط معادلات (۱) و (۳) مانده است.

$$\begin{cases} A^T M^{-1} A Q + D^T \left(HD^T\right)^{-1} H = I \\ DQ = 0 \end{cases} \longrightarrow$$ طرفین این معادله را در D^T ضرب کرده و سپس

با معادله‌ی اول جمع می‌کنیم

$$\left(A^T M^{-1} A + D^T D\right) Q + D^T \left(HD^T\right)^{-1} H = I$$

$$\boxed{\Rightarrow Q = \left(A^T M^{-1} A + D^T D\right)^{-1} \left(1 - D^T \left(HD^T\right)^{-1} H\right)}$$

$$\delta\hat{x} = -QA^T M^{-1} AW - R^T W' \qquad M = BP^{-1}B^T$$

$$\boxed{\Rightarrow \delta\hat{x} = -\left(A^T M^{-1} A + D^T D\right)^{-1} \left(A^T M^{-1} W\right) - H^T \left(DH^T\right)^{-1} W'}$$

حال می‌خواهیم برای حل Q از یک روش دیگر استفاده کنیم:

$$\begin{cases} A^T M^{-1} A Q + D^T \left(HD^T\right)^{-1} H = I \\ DQ = 0 \Rightarrow D^T DQ = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^T M^{-1} A Q + D^T DH^T \left(DH^T\right)^{-1} \left(HD^T\right)^{-1} H = I \\ D^T DQ = 0 \\ A^T M^{-1} AH^T \left(DH^T\right)^{-1} \left(HD^T\right)^{-1} H = 0 \end{cases} \longrightarrow$$ یک ماتریس صفر هم اضافه می‌کنیم

$$\left(A^T M^{-1} A + D^T D\right) Q + \left(A^T M^{-1} A + D^T D\right) H^T \underbrace{\left(DH^T\right)^{-1} \left(HD^T\right)^{-1} H}_{\left(HD^T DH^T\right)^{-1}} = I$$

$$\left(A^T M^{-1} A + D^T D\right) \left(Q + H^T \left(HD^T DH^T\right)^{-1} H\right) = I$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad Q = \left(A^T M^{-1} A + D^T D\right)^{-1} - H^T \left(HD^T DH^T\right)^{-1} H}$$

ثابت می‌شود که این Q با Q بدست آمده در مراحل قبل برابر است.

$$\delta\hat{x} = -QA^T M^{-1} W - R^T W'$$

همچنین ثابت می‌شود که Q یک ماتریس متقارن است یعنی $Q = Q^T$

نکته: برای اینکه Q شبه وارون ماتریس $A^T M^{-1} A$ باشد می‌بایست خواص زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} A^T M^{-1} A Q A^T M^{-1} A = A^T M^{-1} A \\ Q A^T M^{-1} A Q = Q \\ \left(A^T M^{-1} A Q\right)^T = A^T M^{-1} A Q \\ \left(Q A^T M^{-1} A\right)^T = Q A^T M^{-1} A \end{cases}$$

دو خاصیت اول در سرشکنی به روش $\mathcal{M}.C$ همیشه برقرار است. ولی دو خاصیت آخری در صورتی برقرار خواهند بود که $\mathcal{D} = \mathcal{H}$ چنین جوابی همان تعریف سیستم مختصات به روش $\mathcal{M}.C$ از طریق کانسترینت‌های داخلی می‌باشد که به روش *Inner Constraint (I.C)* مشهور است روش $I.C$ برای تعریف دیتوم حالت خاصی از روش‌های مختلف تعریف دیتوم به روش $\mathcal{M}.C$ می‌باشد.

در روش $I.C$ ، $\mathcal{E} = \mathcal{D} = \mathcal{H}$ و همیشه W' برابر صفر است.

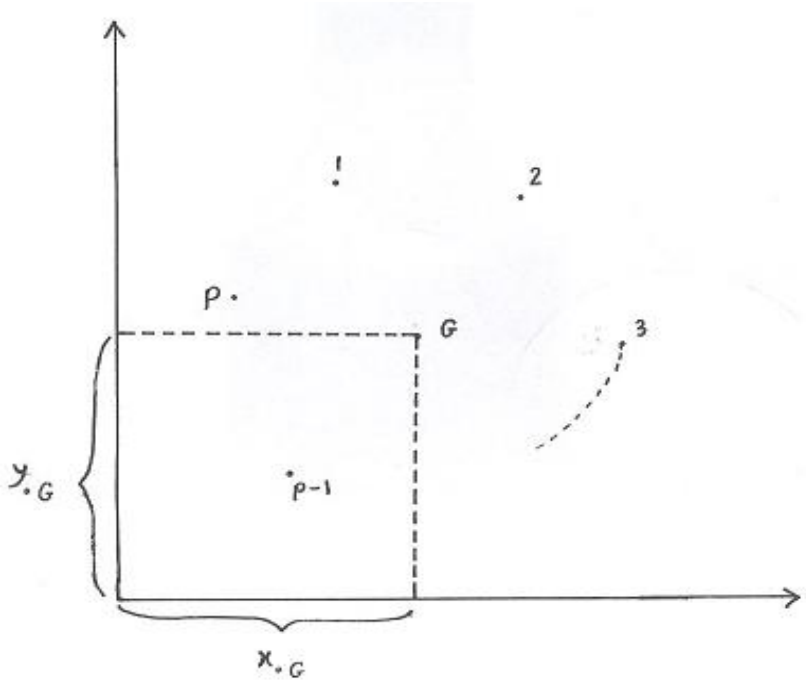
۷,۱. روش *Inner Constraint* (سرشکنی با کانسترینت‌های داخلی):

اگر شبکه‌ای دچار *d-defect* باشد (فرض بر این است که شبکه *c-defect* نداشته باشد) نمی‌توانیم مجهولات را برآورد کنیم. برای اینکه بتوانیم مجهولات را برآورد کنیم نیاز به تعریف سیستم مختصات (دیتوم) برای شبکه داریم. روشی را که برای تعریف سیستم مختصات در اینجا مطرح می‌کنیم روش *Inner Constraint* می‌باشد. *Inner Constraint* حالت خاصی از روش *Minimum Constraint* برای تعریف سیستم مختصات می‌باشد. در این روش نیاز به داشتن مقادیر اولیه مجهولات می‌باشد. لازم به ذکر است روش *Inner Constraint* همیشه در حالت غیرخطی حل می‌شود. (چه معادلات داخلی باشند و چه غیرخطی).

۷,۱,۱. *Inner Constraint* برای شبکه های مسطحاتی بوده (مختصات تمامی نقاط مجهول):

۱) اگر شبکه مثال شکل انتقال در جهت محور x داشته باشیم (به عبارت دیگر انتقال در جهت محور x ها برای سیستم مختصات تعریف نشده باشد) برای تعریف انتقال در جهت محور x ها برای سیستم مختصات یا به عبارت دیگر ثابت کردن شبکه در جهت محور x ها فرض می‌کنیم مختصات x مرکز ثقل شبکه (مرکز ثقل

یک شـبکه، یک نقطه‌ی فرضـی در شـبکه می‌باشـد) قبل از سرشکنی و بعد از سرشکنی ثابت باقی بماند به عبارت دیگر مختصات مرکز ثقل شبکه قبل از سرشکنی و بعد از سرشکنی با هم برابر باشد.



$$\hat{x}_G = x_{0G} \;\Rightarrow \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\hat{x}_i = \frac{1}{\mathrm{P}}\sum_{i=1}^{P}x_{0i}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\left(\hat{x}_i - x_{0i}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{P}\delta\hat{x}_i = 0$$

۲) اگر شـبکه شـکل انتقال در جهت محور y داشـته باشـد (به عبارت دیگر انتقال در جهت محور y ها برای سـیسـتم مختصـات تعریف نشده باشد) برای تعریف انتقال در جهت محور y ها برای سیستم مختصات یا به عبارت دیگر ثابت کردن شـبکه در جهت محور y ها فرض می‌کنیم مختصـات y مرکز ثقل شبکه (مرکز ثقل یک نقطه‌ی فرضـی در شبکه می‌باشد) قبل از سرشکنی و بعد از سرشکنی ثابت باقی می‌ماند به عبارت دیگر مختصات مرکز ثقل شبکه قبل از سرشکنی و بعد از سرشکنی با هم برابر باشد.

$$\hat{y}_G = y_{0G} \;\Rightarrow\; \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\hat{y}_i = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}y_{0i}$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\left(\hat{y}_i - y_{0i}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{P}\delta\hat{y}_i$$

۳) اگر شـبکه شکل دوران داشته باشد به عبارت دیگر دوران برای سیستم مختصات تعریف نشده باشد. برای

تعریف دوران برای دیتوم فرض می‌کنیم میانگین آزیموت مرکز ثقل شـبکه تا نقاط شبکه قبل از سرشکنی و بعد از سرشکنی باقی بماند (به عبارت دیگر با هم برابر باشند)

$$\hat{\bar{\alpha}}_{G_i} = \bar{\alpha}_{0Gi} \Rightarrow \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\hat{\alpha}_{Gi} = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\alpha_{0Gi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\left(\hat{\alpha}_{Gi} - \alpha_{0Gi}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{P}\delta\hat{\alpha}_{Gi} = 0$$

$$\hat{\alpha}_{Gi} = \tan^{-1}\frac{\hat{x}_i - \hat{x}_G}{\hat{y}_i - \hat{y}_G} + kx = \tan^{-1}\frac{\hat{x}_i - \hat{x}_{0G}}{\hat{y}_i - \hat{y}_{0G}} + kx$$

$$\delta\hat{\alpha}_{Gi} = \left.\frac{\partial\hat{\alpha}_{Gi}}{\partial\hat{x}_i}\right|_{\hat{x}=x_0}\left(\hat{x}_i - x_{0i}\right) + \left.\frac{\partial\hat{\alpha}_{Gi}}{\partial\hat{y}_i}\right|_{\hat{x}=x_0}\left(\hat{y} - y_{0i}\right) \longleftarrow$$

بست می دهیم :

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{P}\frac{y_{0i} - y_{0G}}{l_{0Gi^2}}\delta\hat{x}_i - \frac{x_{0i} - x_{0G}}{l_{0Gi^2}}\delta\hat{y}_i = 0$$

$$l_{0G_i} = l_{0G_j} = l_0 \longleftarrow$$

فرض می‌کنیم:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{P}\left(y_{0i} - y_{0G}\right)\delta\hat{x}_i - \left(x_{0i} - x_{0G}\right)\delta\hat{y}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{P}\left(y_{0i}\delta\hat{x}_i - x_{0i}\delta\hat{y}_i\right) - \underbrace{\sum_{i=1}^{P}y_{0G}\delta\hat{x}_i}_{=0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{P}x_{0G}\delta\hat{y}_i}_{=0} = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \sum_{i=1}^{P}y_{0i}\delta\hat{x}_i - x_{0i}\delta\hat{y}_i = 0}$$

۴) اگر شـبکه شـکل مقیاس داشـته باشـد به عبارت دیگر مقیاس برای سیستم مختصات تعریف نشده باشد برای تعریف مقیاس برای دیتوم فرض می‌کنیم میانگین طول مرکز ثقل شبکه تا نقاط شبکه قبل از سرشکنی و بعد از سرشکنی ثابت باقی بماند. (به عبارت دیگر با هم برابر باشند).

$$\hat{\bar{l}}_{Gi} = \bar{l}_{0G_i} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\hat{l}_{G_i} = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}l_{0G_i} \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{P}\delta\hat{l}_{G_i} = 0$$

$$\hat{l}_{Gi} = \sqrt{\left(\hat{x}_i - \hat{x}_G\right)^2 + \left(\hat{y}_i - \hat{y}_G\right)^2} = \sqrt{\left(\hat{x}_i - \hat{x}_{0G}\right)^2 + \left(\hat{y}_i - \hat{y}_{0G}\right)^2}$$

$$\delta\hat{l}_{Gi} = \left.\frac{\partial \hat{l}_{Gi}}{\partial \hat{x}_i}\right|_{\hat{x}=x_0} \left(\hat{x}_i - x_{0i}\right) + \left.\frac{\partial \hat{l}_{Gi}}{\partial \hat{y}_i}\right|_{\hat{x}=x_0} \left(\hat{y}_i - y_{0i}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{P} \delta\hat{l}_{Gi} = \sum_{i=1}^{P} \frac{x_{0i} - x_{0G}}{l_{0Gi}} \delta\hat{x}_i + \frac{y_{0i} - y_{0G}}{l_{0Gi}} \delta\hat{y}_i = 0$$

فرض می‌کنیم : $l_{0G_i} = l_{0G_j} = l_0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{P} \left(x_{0i} - x_{0G}\right)\delta\hat{x}_i + \left(y_{0i} - y_{0G}\right)\delta\hat{y}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{P} x_{0i}\delta\hat{x}_i + y_{0i}\delta\hat{y}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{P} x_{0G}\delta\hat{x}_i}_{=0} - \underbrace{\sum_{i=1}^{P} y_{0G}\delta\hat{y}_i}_{=0} = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \sum_{i=1}^{P} x_{0i}\delta\hat{x}_i + y_{0i}\delta\hat{y}_i = 0}$$

بنابراین در حالت کلی معادلات *Inner – constraint* برای یک شبکه دو بعدی به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{P} \delta\hat{x}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{P} \delta\hat{y}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{P} y_{0i}\delta\hat{x}_i - x_{0i}\delta\hat{y}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{P} x_{0i}\delta\hat{x}_i + y_{0i}\delta\hat{y}_i = 0 \end{cases} \qquad E\delta\hat{x} = 0 \qquad \delta\hat{x} = \begin{bmatrix} \delta\hat{x}_1 \\ \delta\hat{y}_1 \\ \delta\hat{x}_2 \\ \delta\hat{y}_2 \\ \vdots \\ \delta\hat{x}_p \\ \delta\hat{y}_p \end{bmatrix}$$

ماتریس *Inner Constraint* $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ y_{01} & -x_{01} & y_{02} & -x_{02} & \cdots & y_{0P} & -x_{0P} \\ x_{01} & y_{01} & x_{02} & y_{02} & \cdots & x_{0P} & y_{0P} \end{bmatrix}$

۲,۱,۷. ماتریس *Inner-Constraint* برای شبکه‌های یک بعدی (ارتفاعی):

فرض می‌کنیم ارتفاع مرکز ثقل شبکه قبل از سرشکنی و بعد از سرشکنی ثابت باشد:

$$\hat{H}_G = H_{0G} \;\Rightarrow\; \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\hat{H}_i = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}H_{0i}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\left(\hat{H}_i - H_{0i}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\delta\hat{W}_i = 0$$

$$\Rightarrow E = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{1\times p}$$

ماتریس *Inner Constraint* برای شبکه‌های سه بعدی

$$E = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
0 & z_{01} & -y_{01} & 0 & z_{02} & -y_{02} & \cdots & 0 & z_{0p} & -y_{0p} \\
z_{01} & 0 & -x_{01} & z_{02} & 0 & -x_{02} & \cdots & z_{0p} & 0 & -x_{0p} \\
y_{01} & -x_{01} & 0 & y_{02} & -x_{02} & 0 & \cdots & y_{0p} & -x_{0p} & 0 \\
x_{01} & y_{01} & z_{01} & x_{02} & y_{02} & z_{02} & \cdots & x_{0p} & y_{0p} & z_{0p}
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
\rightarrow \text{انتقال در جهت } x \\
\rightarrow \text{انتقال در جهت } y \\
\rightarrow \text{انتقال در جهت } z \\
\rightarrow \text{دوران حول } x \\
\rightarrow \text{دوران حول } y \\
\rightarrow \text{دوران حول } z \\
\rightarrow \text{مقیاس}
\end{array}$$

۷,۲. خصوصیات جواب *Inner Constraint* نسبت به روش‌های دیگر تعریف سیستم مختصات

مزایا :

۱) جواب حاصل از روش $\mathcal{L}.\,C.$ با جواب حاصل از روش می‌نیمم نرم یکسان است به عبارت دیگر:

$$\|\delta\hat{x}_2\| \longrightarrow \min \qquad \text{یا} \qquad \|\delta\hat{x}_2\|_2^2 = \delta\hat{x}^T\delta\hat{x} \longrightarrow \min$$

۲) تریس ماتریس وریانس – کوریانس مجهولات می‌نیمم می‌باشد به عبارت دیگر:

$$trace\left(\Sigma_{\delta\hat{x}\delta\hat{x}}\right) \longrightarrow \min$$

معایب:

۱) خطاهای سیستماتیک و اشتباهات جواب حاصل از روش *Inner Constraint* را شدیداً تحت تأثیر قرار می‌دهند.

۲) هیچ توجیه فیزیکی برای ثابت نگه داشتن مرکز ثقل شبکه وجود ندارد.

۸. طراحی شبکه:

مهمترین کار یک مهندس نقشه‌بردار تعیین مختصات دقیق نقطه است. حال چگونه می‌توانیم به مختصات دقیق نقاط برسیم؟

۸,۱. روشهای طراحی شبکه :

۱) روش سعی و خطا ؛ ۲) روش تحلیلی

۸,۱,۱. مقایسه دو روش سعی و خطا و روش تحلیلی

✓ معایب روش سعی و خطا :

۱) زمان‌بر ؛ ۲) هزینه‌بر ؛ ۳) دقت پایین‌تر ؛ ۴) شبکه ممکن است شبکه بهینه‌ای نباشد بلکه بین یک سری آزمایش محدود (شبکه محدود) ما شبکه‌ی بهینه را انتخاب می‌کنیم. البته مواد ۱ و ۲ با وجود کامپیوتر در حال حاضر منتفی است.

✓ مزایای روش سعی و خطا :

سادگی روش (نیازی به روابط ریاضی پیچیده نیست).

✓ معایب روش تحلیلی :

فرموله کردن (ممکن است یا رابطه‌ی ریاضی بدست نیاید یا اگر بدست آمد قابل حل نباشد).

✓ مزایای روش تحلیلی :

شبکه‌ی بهینه بدست می‌آید.

۸,۱,۲. روش سعی و خطا در طراحی شبکه‌های ژئودتیکی:

۱. انتخاب معیار: مثلاً می‌توانیم بگوییم نیم قطر اطول بیضی خطای مطلق نقاط کمتر از $۵mm$ باشد و یا عدد آزادی مشاهدات بیشتر از ۰,۵ باشد.

۲. ریختن طرح مشاهداتی اولیه: در این مرحله تعداد و جای نقاط و همچنین تعداد و نوع و دقت مشاهدات اولیه در نظر گرفته می‌شود. این مرحله بهتر است با شناسایی منطقه صورت گیرد.

۳. محاسبه معیارها : در این مرحله معیارهای مورد نیاز برای طراحی محاسبه شده با معیارهای انتخابی

در مرحله اول مقایسه می‌گردد. اگر این معیارها برآورده شوند در این صورت به طرح مشاهداتی ریخته شده طرح مناسب اول گفته می‌شود. در غیر این صورت می‌بایست طرح مشاهداتی اولیه را به صورت جزیی (مثلاً با کم و یا زیاد کردن مشاهدات) تغییر دهیم و دوباره معیارها را محاسبه نماییم. آنقدر این کار را انجام می‌دهیم تا طرح مناسب اول بدست آید.

۴. تغییر طرح مشاهداتی به صورت کلی

مثلاً اگر طرح اولیه با مشاهدات طولی بود این بار مشاهدات زاویه‌ای انجام می‌دهیم.

۵. بازگشت به مرحله‌ی ۳ تا طرح‌های مناسب دیگری بدست آید.

۶. از بین طرحهای مناسب طرحی که از نظر اقتصادی به صرفه‌تر باشد به عنوان طرح بهینه در نظر گرفته می‌شود.

برای داشتن طرح مشاهداتی اولیه (تا حدودی مناسب) می‌توان از اعتمادپذیری و عدد آزادی کمک گرفت به این صورت که اگر در شبکه‌ای مشخص باشد که مشاهدات چه نوعی هستند و تعداد آنها چندتاست می‌توان با معیار اعتمادپذیری تعداد نقاط را بدست آورد. یا تعداد نقاط و نوع مشاهدات مشخص است می‌توان تعداد مشاهدات را بدست آورد و غیره.

در ریختن طرح مشاهداتی اولیه معمولاً از عدد آزادی متوسط استفاده می‌کنند به این ترتیب که مثلاً فرض می‌کنند متوسط عدد آزادی در شبکه ۰٫۵ باشد.

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = df \;\Rightarrow \bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{df}{n}$$

n : تعداد مشاهدات

مثال: در شبکه مسطحاتی ۱۰ نقطه‌ای قرار است مشاهدات زاویه‌ای انجام شود. اگر متوسط عدد آزادی ۰٫۵ باشد تعداد مشاهدات را تعیین کنید.

$$df = n - 2 + 40 = n - 16$$

$$\bar{d} = 0.5 = \frac{n-16}{n} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}n = n - 16 \;\Rightarrow\; n = 32$$

n : تعداد مشاهدات

۸,۲. مراتب طراحی شبکه

۸, ۲, ۱. طراحی مرتبه صفر *ZOD (Zero Order Design)* :

"تعیین سیستم مختصات بهینه برای شبکه"

پارامترهای آزاد (مجهولات): $\Sigma_{\hat{x}}$ و $\hat{x}$

پارامترهای آزاد (معلومات) : $\mathcal{P}$ و $\mathcal{A}$

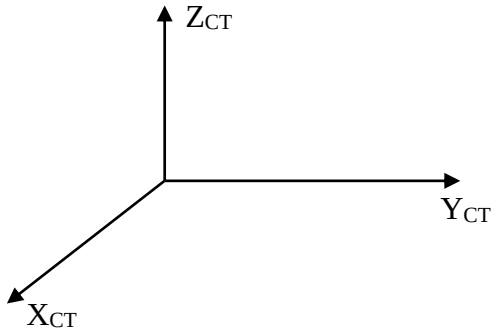
با توجه به اینکه سیستم مختصات روی مجهولات اثر می‌گذارد بهتر است سیستم مختصاتی برای شبکه تعیین شود که ما را به دقت مورد نیاز برای مجهولات برساند. معیاری که معمولاً برای تعیین سیستم مختصات در نظر گرفته می‌شود. معیارهای کلی دقت (توابع اسکالر دقت) می‌باشد و از بین آنها *trace* بیشتر استفاده می‌گردد.

$$trace(\Sigma_x) \longrightarrow \min$$

مثلاً همان طوری که می‌دانیم در سیستم مختصاتی که به روش *Inner Constraint* برای شبکه تعریف می‌شود تریس ماتریس وریانس کوریانس مجهولات می‌نیمم است. سیستم مختصات *Inner Constraint* ذاتاً تریس ماتریس وریانس کوریانس مجهولات را نسبت به سیستم مختصات‌های *Minimum Constraint* دیگر کوچکتر می‌کند.

❖ کلاً سه نوع سیستم مختصات می‌توانیم داشته باشیم:

۱. اول اینکه سیستم مختصات جهانی داشته باشیم (سیستم مختصات از قبل تعریف شده باشد) در این حالت طراحی مرتبهٔ صفر معنا ندارد زیرا مجبوریم از این سیستم مختصات استفاده کنیم. در مواردی که برای شبکه سیستم مختصات تعریف شده باشد دیگر طراحی مرتبه صفر معنا ندارد.



۲. تعریف سیستم مختصات (تعیین پارامترهای سیستم مختصات) با استفاده از کانسترینت‌ها:

مثلاً در یک شبکه مسطحاتی می‌توانیم یک نقطه ثابت یک طول ثابت و یک آزیموت ثابت تعریف کنیم. در این حالت می‌توان طراحی مرتبه صفر را انجام داد ولی می‌بایست دقت کنیم که معیار انتخابی برای تعیین سیستم مختصات ناوردا نباشد مثل اعتمادپذیری. در این حالت می‌توان دقت را به عنوان معیار در نظر گرفت. مثلاً اگر بخواهیم $tr(\Sigma_n)$ می‌نیمم شود می‌توانیم از کانسترینت‌های داخلی استفاده کنیم.

۳. تعریف سیستم مختصات (تعیین پارامترهای سیستم مختصات) با استفاده از مشاهدات:

اگر پارامترهای سیستم مختصات قابل مشاهده باشند یعنی ما برای تعریف سیستم مختصات بتوانیم پارامترهای سیستم مختصات را مشاهده کنیم در این حالت نیز می‌توان طراحی مرتبه صفر انجام داد. مثلاً اگر برای تعریف مقیاس در شبکه‌ای مسطحاتی بتوانیم چندین طول را بخوانیم و یا برای تعریف دوران بتوانیم چندین آزیموت را مشاهده کنیم می‌بایست برای تعریف سیستم مختصات مشخص شود چه طول‌هایی و چه آزیموت‌هایی و چندتا قرائت شوند. در این حالت نیز نیاز به معیار برای انتخاب بهترین سیستم مختصات داریم که می‌تواند معیارها می‌نیمم کردن تریس ماتریس وریانس کوواریانس باشد. در این حالت اعتمادپذیری را نیز می‌توان به عنوان معیار در نظر گرفت.

نکته: در طراحی شبکه‌های ژئودتیکی فقط نیاز به مقدار اولیه مجهولات (جای نقاط) و نوع مشاهدات و تعداد مشاهدات است، نیاز به مقدار مشاهده نیست. مقدار اولیه مجهولات با داشتن وضعیت نسبی نقاط به هم و تعریف یک سیستم مختصات محلی برای شبکه بدست می‌آید.

۲,۲,۸. طراحی مرتبه یک FOD (First Order Design)

" تعیین شبکه بهینه برای شبکه(مشخص کردن موقعیت بهینه نقاط شبکه) "

پارامترهای آزاد (مجهولات) : $\mathcal{A}$

پارامترهای ثابت (معلومات) : $\mathcal{P}$ و $\Sigma_x\left(\Sigma_x^C\right)$

در اینجا فعلاً بحث هزینه مطرح نمی‌باشد. در ضمن معیار ما برای طراحی مرتبه یک معمولاً اعتمادپذیری

اســت در حالیکه می‌دانیم شــکل شــبکه $(\mathcal{A})$ هم روی اعتمادپذیری اثر می‌گذارد و هم روی دقت ولی اثر آن روی اعتمادپذیری بیشتر است.

در طراحی مرتبه یک به روش ســعی و خطا می‌بایســت جای نقاط (حداقل یک ســری از نقاط که مجاز به حرکت می‌باشــند) را تغییر دهیم و به ازای هر تغییر یک ماتریس $\mathcal{A}$ داشــته باشــیم. در این قسمت $\mathcal{P}$ معلوم فرض می‌شود.

از بین این $\mathcal{A}$ هــا ، شــــکلی که معیار ما را برآورده کند شــــکل بهینه نامیده می‌شــــود مثلاً معیارها می‌تواند $r_{\min} \longrightarrow r_{\max}$ باشد:

$$
\begin{aligned}
&A_1 \longrightarrow R_1 \longrightarrow r_{\max_1} \\
&A_2 \longrightarrow R_2 \longrightarrow r_{\max_2} \\
&\vdots \\
&A_n \longrightarrow R_n \longrightarrow r_{\max_n}
\end{aligned}
$$

۸,۲,۳. طراحی مرتبه دو SOD *(Second Order Design)* :

" تعیین وزن بهینه برای شبکه "

پارامترهای آزاد (مجهولات) : $\mathcal{P}$

پارامترهای ثابت (معلومات) : $\mathcal{A}$ و $\Sigma_x\left(\Sigma_x^C\right)$

طراحی مرتبه دو به روش ســعی و خطا مانند طراحی مرتبه یک به روش ســعی و خطا می‌باشــد. معیار ما در این حالت دقت می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
&P_1 \longrightarrow \Sigma_{x_1} \longrightarrow a_{\max_1} \\
&P_2 \longrightarrow \Sigma_{x_2} \longrightarrow a_{\max_2} \\
&\vdots \\
&P_n \longrightarrow \Sigma_{x_n} \longrightarrow a_{\max_n}
\end{aligned}
$$

مثلاً معیارها می‌تواند $a_{\max} \longrightarrow \min$ باشد.

۸,۲,٤. طراحی مرتبه سه TOD *(Third Order Design)* :

هدف گسترش و یا بهبود شبکه (معمولاً در این مرتبه‌ی طراحی شبکه را گسترش می‌دهند)

پارامترهای ثابت (معلومات) : $\Sigma_x\left(\Sigma_x^C\right)$

پارامترهای قسمتی آزاد : $\mathcal{P}$ و $\mathcal{A}$

در این مرتبه از طراحی ممکن است بخواهیم نقاطی را یا مشاهداتی را به شبکه اضافه کنیم.

نکته: در طراحی مرتبه سه $\mathcal{A}$ و $\mathcal{P}$ قسمتی آزاد هستند.

۸,۲,۵. طراحی ترکیبی $Comp$

"طراحی همزمان مراتب یک و دو" ← بهبود شبکه

پارامترهای آزاد (مجهولات) : $\mathcal{A}$ و $\mathcal{P}$

پارامترهای ثابت (معلومات) : $\Sigma_x\left(\Sigma_x^C\right)$

چون معیارهایی که در طراحی مرتبه یک اثر می‌گذارند در طراحی مرتبه دو هم اثر دارند نیاز است که یک بار هم این دو مرتبه‌ی طراحی را با هم انجام دهیم. مثلاً ممکن است با شکل بهینه‌ای که طراحی کرده‌ایم وزن بهینه بدست نیاید.

۸,۳. عوامل تأثیرگذار روی مختصات نقاط:

- دقت مشاهدات (مشاهدات دقیق)
- تعداد مشاهدات (درجه آزادی) و تعداد نقاط
- شکل شبکه
- در برخی موارد سیستم مختصات

بنابراین برای اینکه ما می‌توانیم مختصات نقاط را تعیین کنیم نیاز داریم به شبکه برای اینکه یک شبکه بهینه طراحی کنیم نیاز داریم به معیارهای بهینگی.

نکته: بحث $\mathcal{GPS}$ و طراحی شبکه‌های $\mathcal{GPS}$ یک بحث کاملاً جداست که پیچیدگی‌های خاص خود را دارد. بحث ما در این درس در مورد ژئودزی کلاسیک (یعنی روش‌های معمول تعیین موقعیت و مشاهدات معمولی نظیر طول، زاویه، امتداد، اختلاف ارتفاع و ...) است.

۹. معیارهای بهینگی طراحی شبکه :

۱) دقت

۲) هزینه و زمان

۳) قابلیت اعتماد (اعتماد پذیری) : الف) اعتمادپذیری داخلی ؛ ب) اعتمادپذیری خارجی

۴) حساسیت ← در شبکه‌های دینامیکی و میکروژئودزی اثر دارد.

حساسیت قابلیت کشف جابجایی‌ها در شبکه را به ما می‌دهد. شبکه‌ای برای ما بهتر است که قابلیت کشف جابجایی‌های کوچکتری را داشته باشد.

بنابراین ما در نهایت در طراحی شبکه یک تابع هدف به صورت زیر داریم که می‌خواهیم این تابع هدف را Max کنیم:

f: تابع هدف (حساسیت و اعتمادپذیری و هزینه و دقت)

تابع هدف = α_1 (دقت) + α_2 (اعتمادپذیری) + a_3 (حساسیت) + α_4 (هزینه)$^{-1}$ $\longrightarrow \max$

ما ابتدا در مورد معیارها صحبت می‌کنیم زیرا می‌خواهیم ببینیم شکل شبکه چگونه روی دقت یا روی قابلیت اعتماد اثر می‌گذارد یا اینکه وزن مشاهدات چگونه روی دقت یا روی قابلیت اعتماد اثر می‌گذارد.

۹,۱. دقت:

بهترین کمیت برای بیان دقت در شبکه‌ها ماتریس وریانس کوریانس مجهولات $(\Sigma_{\hat{x}})$ می‌باشد.

$$\Sigma_{\hat{x}} = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 \left(A^T M^{-1} A + D^T D\right)^{-1} A^T M^{-1} A \left(A^T M^{-1} A + D^T D\right)^{-1}$$

اگر کانسترینت را به معادلات تزریق کنیم.

$$\Sigma_{\hat{x}} = \sigma_0^2 \left(A^T M^{-1} A\right)^{-1}$$ مدل ترکیبی

$$\Sigma_{\hat{x}} = \sigma_0^2 \left(A^T P A\right)^{-1}$$ مدل پارامتریک خطی

با توجه به اینکه در معادلات بالا هم ماتریس $\mathcal{A}$ و هم ماتریس $\mathcal{P}$ وجود دارد بنابراین هم شکل شبکه و هم وزن مشاهدات روی $\Sigma_{\hat{x}}$ و در نتیجه روی دقت در شبکه‌ها مؤثر است.

$A_1 \longrightarrow \Sigma_{\hat{x}}^1$	$P_1 \longrightarrow \Sigma_{\hat{x}}^1$	$A_1, P_1 \longrightarrow \Sigma_{\hat{x}}^1$
$A_2 \longrightarrow \Sigma_{\hat{x}}^2$	$P_2 \longrightarrow \Sigma_{\hat{x}}^2$	$A_2, P_2 \longrightarrow \Sigma_{\hat{x}}^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_n \longrightarrow \Sigma_{\hat{x}}^n$	$P_n \longrightarrow \Sigma_{\hat{x}}^n$	$A_n, P_n \longrightarrow \Sigma_{\hat{x}}^n$
طراحی مرتبه ۱	طراحی مرتبه ۲	طراحی ترکیبی
$\mathcal{P}$ ثابت	$\mathcal{A}$ ثابت	

نکته : چرا ماتریس $\mathcal{A}$ در ارتباط با شکل شبکه است؟

مدل‌های ما اکثراً مدل‌های غیرخطی هستند. در مدل‌های غیرخطی برای خطی کردن نیاز به مقدار اولیه برای مجهولات داریم. این مقدار اولیه برای مجهولات جای تقریبی نقاط شبکه را مشخص می‌کند یعنی شکل تقریبی شبکه را مشخص می‌کند و این مقادیر اولیه در ماتریس $\mathcal{A}$ ظاهر می‌شود. بنابراین ماتریس $\mathcal{A}$ بیانگر شکل شبکه است.

۹,۱,۱. استفاده از معیارهای کلی برای مقایسه دقت (استفاده از توابع اسکالر دقت)

$$f : M_{u\times u} \longrightarrow R$$
$$f\left(\Sigma_{\hat{x}}\right) = a$$

که a عدد یا اسکالر است. توابع اسکالری که در این روش استفاده می‌شوند گوناگونند که بنا به استفاده از هر کدام از آنها اسم خاصی به آنها اختصاص داده شده است که عبارتند از:

- بهینگی $\mathcal{N}$:

$$f = \| \bullet \|$$
$$f\left(\Sigma_{\hat{x}}\right) = \|\Sigma_{\hat{x}}\|$$

- بهینگی $\mathcal{A}$:

$$f = Trace$$
$$f\left(\Sigma_{\hat{x}}\right) = Trace\left(\Sigma_{\hat{x}}\right) = \sum_{i=1}^{u} \lambda_i$$

- بهینگی $\mathcal{E}$: $f = \Sigma_{\hat{x}}$ بزرگترین مقدار ویژه

$$f\left(\Sigma_{\hat{x}}\right)=\lambda_{\max}$$

- بهینگی S (بهینگی طیفی) : $f\left(\Sigma_{\hat{x}}\right)=\lambda_{\max}-\lambda_{\min}$

که $\lambda_{\max}-\lambda_{\min}$ پهنای طیفی است.

- بهینگی $\mathcal{D}$: $f\left(\Sigma_{\hat{x}}\right)=\det\left(\Sigma_{\hat{x}}\right)=\prod_{i=1}^{u}\lambda_i$

- $y=C^T x_{u\times 1}$

$C_{u\times 1}$: بردار ثابت دلخواه بسته به نوع کاربرد :

$$f\left(\Sigma_{\hat{x}}\right)=\Sigma_y=C^T\Sigma_{\hat{x}}C$$

* هر چه معیارهای فوق کوچکتر باشند بهتر است به عبارت دیگر دقت بالاتر است.

❖ استفاده از توابع اسکالر دقت بنا به دلایل زیر خیلی مناسب نمی‌باشد:

a) این معیارها، معیارهای کلی هستند و اطلاعاتی راجع به جزئیات شبکه در اختیار ما نمی‌گذارند. مثلاً نمی‌توانند بگویند دقت فلان نقطه چقدر است زیر u^2 عدد که هر کدام تغییری برای دقت نقاط دارند را تبدیل به یک عدد کردیم و در این فرآیند بسیاری از اطلاعات را از دست دادیم ولی می‌توان از این معیارها برای مقایسه شبکه‌ها استفاده نمود.

b) این معیارها به سیستم مختصات ما یعنی دیتوم ما $(\mathcal{D})$ وابسته هستند. این معیارها در سیستم مختصات‌های مختلف فرق می‌کند. به عبارت دیگر بدون تعریف سیستم مختصات نمی‌توانیم از این معیارها استفاده کنیم. دوست داریم از معیاری استفاده کنیم که در هر سیستم مختصات معتبر باشد. دوست داریم شکل شبکه و یا وزن مشاهدات اگر بهینه هستند در هر سیستم مختصاتی بهینه باشند و این مستلزم این است که معیاری که برای بهینگی شکل و یا وزن انتخاب می‌کنیم به سیستم مختصات بستگی نداشته باشد.

c) ممکن است همه‌ی معیارها با هم $\mathcal{M}in$ نشوند بلکه در بدترین شرایط ممکن است مثلاً *trace* می‌نیمم شود ولی *det* ماکزیمم شود.

۹,۱,۲. استفاده از معیارهای محلی برای مقایسه دقت (بیضی خطای مطلق و نسبی) :

به عنوان مثال در شبکه‌ی مسطحاتی که مختصات نقاط مجهول است:

$$\Sigma\hat{x}_{u\times u} \qquad\qquad u=2p$$

که در آن u تعداد مجهولات و p تعداد نقاط است.

در چنین شبکه‌ای p تا بیضی خطای مطلق و $\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}$ بیضی خطای نسبی داریم.

دیگر مثل روش قبل معیاری کلی نیست. از یک ماتریس وریانس کوریانس $2p\times 2p$ ، p تا بیضی خطای مطلق و $\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}$ تا بیضی خطای نسبی بدست می‌آید.

یک حسن استفاده از معیارهای محل دقت نسبت به استفاده از معیارهای کلی دقت این است که مانند آنها کلی نیستند. حسن دیگر استفاده از این معیارها نسبت به معیارهای کلی دقت این است که وابستگی آنها نسبت به سیستم مختصات خیلی کمتر از معیارهای کلی دقت است چون پارامترها کیفی هستند. بیضی خطای مطلق کاملاً وابسته به سیستم مختصات است هم به انتقال، هم به مقیاس و هم به دوران وابسته است ولی نسبت به پارامترهای اسکالر خیلی کمتر وابسته است. تأثیر سیستم مختصات بر روی بیضی خطای مطلق نقاط خیلی کمتر از پارامترهای اسکالر است.

بیضی خطای نسبی به انتقال وابسته نیست (یعنی اگر سیستم مختصات جایش عوض شود تأثیری در بیضی خطای نسبی ندارد) فقط دوران و مقیاس روی بیضی خطای نسبی تأثیر می‌گذارند ولی خیلی کمتر از پارامترهای اسکالر.

نکته: مبدأ بیضی خطای نسبی مهم نیست کجا باشد فقط باید روی خط واصل دو نقطه باشد. معمولاً وسط قرار می‌گیرد. مبدأ بیضی خطای مطلق هر نقطه روی مختصات سرشکن شده آن نقطه قرار می‌گیرد.

۹,۱,۳. استفاده از ماتریس محک برای مقایسه دقت شبکه‌ها:

ماتریس محک یک ماتریس وریانس – کوریانس است که خودمان می‌سازیم. یک ماتریس و ریانس کوریانس تصنعی با ساختار ایده‌آل ساختار ایده‌آل برای اینکه قرار است دقت بهینه شبکه را به ما نشان بدهد. Σ^C در حقیقت دقت بهینه شبکه است.

به عنوان مثال در طراحی مرتبه یک: $\mathcal{P}$ ثابت و معلوم

$$A_1 \longrightarrow \Sigma_1 \qquad \left\|\Sigma_1 - \Sigma^C\right\|$$
$$A_2 \longrightarrow \Sigma_2 \qquad \left\|\Sigma_2 - \Sigma^C\right\|$$
$$\vdots$$
$$A_n \longrightarrow \Sigma_n \qquad \left\|\Sigma_n - \Sigma^C\right\|$$

به عنوان یک معیار از بین این شبکه‌ها، شبکه‌ای را در نظر می‌گیریم که بیشتر به Σ^C نزدیک شد. قرار است شبکه‌ی ما طوری باشد که تا حد ممکن ماتریس محک را تقریب کند.

❖ ماتریس‌های محک عموماً دارای سه خاصیت می‌باشند:

۱- بیضی خطای مطلق نقاط در Σ^C دایره می‌شود با شعاع یکسان $\mathcal{R}$

۲- بیضی خطای نسبی نقاط در Σ^C نیز دایره‌ای می‌شوند که شعاع دوایر متناسب است با طول نقاط (شعاع دوایر تابعی از فاصله بین نقاط) $R_{ij} = f\left(S_{ij}\right)$

البته این تابع باید شرایطی داشته باشد یکی اینکه اگر طول بیشتر باشد مقدار تابع نیز باید بیشتر باشد پس این توابع باید حداقل غیر نزولی باشند دوم اینکه باید توابعی مثبت باشند زیرا منفی بودن برایش معنی ندارد.

۳- هیچ کوریانسی بین x و y نقاط وجود نداشته باشد. $\sigma_{x_i y_i} = 0$

❖ سه روش برای ساختن ماتریس محک وجود دارد که عبارتند از:

۱- روش تیلور – کارمن (گرافارند) :

ماتریس محک با ساختار تیلور کارمن

۲- ساختار آشفته

حالت خاصی از ساختار تیلور – کارمن که در آن غیر از اینکه بیضی خطای مطلق نقاط دایره‌ای و با شعاع یکسان هستند بیضی خطای نسبی نقاط نیز دایره‌ای می‌باشند که شعاع دوایر متناسب است با طول بین نقاط.

۳- اصلاح ماتریس وریانس – کوریانس موجود

در این حالت با توجه به نوع مسأله و کاربرد طراحی را به گونه‌ای انجام می‌دهیم تا ماتریس وریانس – کوریانس موجود خواص و شرایط خواسته شده را دارا باشد. مثلاً می‌خواهیم طراحی مرتبه یک را به گونه‌ای انجام دهیم تا بیضی خطای مطلق نقاط دایره‌ای شود. یا طراحی مرتبه یک را به گونه‌ای انجام دهیم تا نیم قطر اطول بیضی‌های خطای مطلق نقاط کوچکتر از cm ۵ باشد.

ذکر این نکته ضروری است که ما معمولاً از این روش استفاده می‌کنیم.

❖ مشکل دیتوم برای ساختارهای اول و دوم:

در ساختارهای اول و دوم هیچ اطلاعی از شبکه موجود و دیتوم آن نداریم که یک ماتریس محک می‌سازیم. مختصات‌های استفاده شده در ماتریس محک، کاملاً اختیاری و تصادفی می‌باشند که ممکن است با شبکه واقعی سازگار نباشند. به عبارت دیگر Σ^C کاملاً مستقل از دیتوم شبکه تعریف می‌شود و ممکن است حالت غیرواقعی داشته باشد. برای اینکه Σ^C را با واقعیت سازگار کنیم و آن را مرتبط با شبکه‌ی خودمان بکنیم از تبدیل S استفاده می‌کنیم.

ماتریس محک جدید $\Sigma_S^C = S\Sigma_{S^T}^C$

۹,۲. اعتماد پذیری (قابلیت اعتماد) :

اعتمادپذیری یک شبکه اطلاعاتی در مورد آن مشاهدات اشتباه به ما نمی‌دهد. اگر اعتمادپذیری شبکه‌ای بالا باشد آن شبکه به ما نمی‌گوید کدام مشاهده اشتباه است بلکه به ما کمک می‌کند که بهتر بتوانیم تشخیص دهیم که مشاهده‌ی اشتباهی وجود دارد. اگر بخواهیم مشاهدات اشتباه را کشف کنیم مثلاً باید از روش باردا استفاده کنیم.

۹,۲,۱. اعتمادپذیری داخلی:

" قابلیت شبکه در کشف مشاهدات اشتباه و خطای سیستماتیک "

حال می‌خواهیم تأثیر شکل شبکه یا وزن مشاهدات یا ترکیبی از این دو را روی اعتمادپذیری ببینیم.

اگر فرض کنیم تنها دلیل رد آزمون فاکتور وریانس ثانویه وجود اشتباه در مشاهدات باشد در حقیقت

اعتمادپذیری خوب باعث می‌شـود که آزمون فاکتور وریانس ثانویه‌ی ما قوی‌تر شود و بنابراین اگر مشاهده‌ی اشـتباهی وجود داشـته باشد آزمون ما رد شود. بعد از اینکه آزمون رد شد می‌فهمیم که مشاهده‌ی اشتباهی وجود دارد پس می‌رویم سراغ کشف آن مشاهده‌ی اشتباه از طریق روشهایی مثل روش باردا .

برای شـــروع ابتدا روابطی را که نیاز داریم می‌نویســـیم. مدل را مدل پارامتریک غیرخطی در نظر می‌گیریم.

$$\left(W=-\delta l, B=-I\right)$$

$$\begin{cases}\hat{l}=f\left(\hat{x}\right) \Rightarrow \delta\hat{l}=A\delta\hat{x} \\ D\delta\hat{x}+W'=0\end{cases} \qquad M=P^{-1}$$

$$\delta\hat{x}=\left(A^TPA+D^TD\right)^{-1}A^TP\delta l-H^T\left(DH^T\right)^{-1}W'$$

$$\Sigma_{\delta\hat{x}}=\sigma_0^2Q=\sigma_0^2\left(A^TPA+D^TD\right)^{-1}A^TPA\left(A^TPA+D^TD\right)^{-1}$$

$$\hat{V}=A\delta\hat{x}-\delta l=\left(A\left(A^TPA+D^TD\right)^{-1}A^TP-I\right)\delta l=-R\delta l$$

$$\delta\hat{l}=\delta l+\hat{V}=A\left(A^TPA+D^TD\right)^{-1}A^TP\delta l$$

$$\Sigma_{\hat{V}}=\sigma_0^2\left(P^{-1}-A\left(A^TPA+D^TA+D^TD\right)^{-1}A^T\right)=\sigma_0^2\left(P^{-1}-APA^T\right)$$

$$\Sigma_{\delta\hat{l}}=\sigma_0^2A\left(A^TPA+D^TD\right)^{-1}A^T=\sigma_0^2AQA^T$$

$$Q=\left(A^TPA+D^TD\right)^{-1}-H^T\left(HD^TDH^T\right)^{-1}H$$

$R=I-A\left(A^TPA+A^TD\right)^{-1}A^TP$ ماتریس آزادی

❖ ماتریس آزادی دارای خصوصیات زیر می‌باشد:

۱- ماتریس آزادی ماتریسی است مستقل از دیتوم یعنی به $\mathcal{D}$ بستگی ندارد.

۲- $trace(R)=n-u+d=df$

۳- $0\le d_i=r_{ii}\le 1$ عناصر روی قطر اصلی ماتریس آزادی : d_i

می‌خواهیم تأثیر مشاهدات اشتباه را روی $\hat{V}$ پیدا کنیم:

ما در این قسمت فرض می‌کنیم مشاهده‌ی اشتباه وجود داشته باشد.

$l\longrightarrow l+\Delta l$ یا $\delta l\longrightarrow\delta l+\Delta l$

Δl : اشتباه یا خطای سیستماتیک

$$\hat{V}' = -R(\delta l + \Delta l) = -R\delta l - R\Delta l = \hat{V} - R\Delta l$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta\hat{V} = -R\Delta l$$

در پردازش‌های بعد از سرشکنی هدف کنترل نتایج می‌باشد که آیا قابل قبول هست یا خیر؟

برای اینکـه بفهمیم آیا نتایج قابل قبول هســـت یا خیر نیاز به آزمون داریم (تصـــمیم‌گیری آماری) یکی از آزمون‌ها برای تست نتایج آزمون فاکتور وریانس ثانویه می‌باشد.

اگر کلیه‌ی مراحل سـرشکنی و نتایج هیچ مشکلی نداشته باشد انتظار می‌رود $\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$ در غیر این صورت ممکن اسـت که در مراحل سرشکنی دچار اشکال شده باشیم مثلاً ممکن است مشاهدات اشتباهی در لیست مشاهدات وجود داشته باشد.

$$\begin{cases} H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 & \text{یا} \quad \dfrac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = 1 \\ H_1 : \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2 & \text{یا} \quad \dfrac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \neq 1 \end{cases}$$

برای انجام آزمون فوق نیاز به آماره داریم. آماره‌ی ما $df\,\dfrac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ می‌باشد.

توضیح: $\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{\hat{V}^T P \hat{V}}{df} = \dfrac{\sigma_0^2 \hat{V}^T \Sigma_{ll}{}^{-1} \hat{V}}{df} \Rightarrow \dfrac{df\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \hat{V}^T \Sigma_{ll}{}^{-1} \hat{V}$

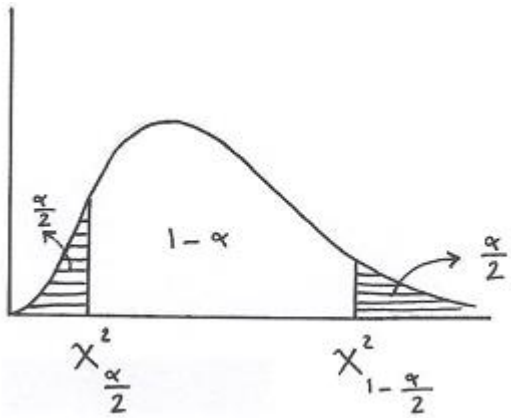
ثابت می‌شود رابطه‌ای فوق از توزیع χ_{df}^2 تبعیت می‌کند.

$$\frac{df\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \hat{V}^T \Sigma_{ll}{}^{-1} \hat{V} \longrightarrow \chi_{df}^2$$

با ریسک α برای خطای نوع اول، می‌توانیم ناحیه بحرانی زیر را برای رد یا قبول فرض صفر در نظر بگیریم.

$\chi^2_{df,\frac{\alpha}{2}} < \dfrac{df\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{df,1-\frac{\alpha}{2}}$ قبول $\mathcal{H}_0$

در غیر این صورت قبول $\mathcal{H}_1$



$$\frac{df\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}=\frac{\hat{V}'^T P\hat{V}'}{\sigma_0^2}=\frac{1}{\sigma_0^2}\left[\left(\hat{V}+\Delta\hat{V}\right)^T P\left(\hat{V}+\Delta\hat{V}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sigma_0^2}\left[\hat{V}^T P\hat{V}+\hat{V}^T P\Delta\hat{V}+\Delta\hat{V}^T P\hat{V}+\Delta\hat{V}^T P\Delta\hat{V}\right]$$

$$E\left[\frac{df\hat{\sigma}_0'^2}{\sigma_0^2}\right]=E\left[\frac{\hat{V}^T P\hat{V}}{\sigma_0^2}\right]+E\left[\frac{1}{\sigma_0^2}\hat{V}^T P\Delta\hat{V}\right]+E\left[\frac{1}{\sigma_0^2}\Delta\hat{V}^T P\hat{V}\right]+E\left[\frac{1}{\sigma_0^2}\Delta\hat{V}^T P\Delta\hat{V}\right]$$

$$=df+\frac{P\Delta\hat{V}}{\sigma_0^2}E\left(\hat{V}^T\right)+\frac{\Delta\hat{V}^T P}{\sigma_0^2}E\left(\hat{V}\right)+\frac{\Delta\hat{V}^T P\Delta\hat{V}}{\sigma_0^2}$$

$$=df+0+0+\frac{\Delta\hat{V}^T P\Delta\hat{V}}{\sigma_0^2}=df+\underbrace{\frac{\Delta\hat{V}^T P\Delta\hat{V}}{\sigma_0^2}}_{\text{پارامتر غیرمرکزی}}$$

توضیح: پارامتر غیرمرکزی در حقیقت شیفت تابع چگالی احتمال است به ازای قبول فرض‌های $\mathcal{H}_0$ و $\mathcal{H}_1$ یعنی اختلاف بین دو میانگین در فرض‌های $\mathcal{H}_0$ و $\mathcal{H}_1$.

نکته : $\Delta\hat{V}$ به عنوان یک خطای سیستماتیک یا یک اشتباه قلمداد می‌شود. دیگر به عنوان یک متغیر تصادفی قلمداد می‌شود بنابراین از امید بیرون می‌آید. از بالا نتیجه می‌گیریم وقتی که ما مشاهده‌ی اشتباهی داشته باشیم آماره‌ی ما به اندازه‌ی پارامتر غیرمرکزی شیفت پیدا می‌کند. هر چقدر این پارامتر غیرمرکزی بزرگتر باشد ما راحت‌تر می‌توانیم آزمون‌مان را رد کنیم یعنی اگر بتوانیم کامل کنیم که پارامتر غیرمرکزی بزرگتر بشود و آن وقت آزمون‌مان به راحتی رد می‌شود.

$$\text{پارامتر غیرمرکزی}=\frac{\Delta\hat{V}^T P\Delta\hat{V}}{\sigma_0^2}$$

برای اینکـه بخواهیم پارامتر غیرمرکزی را بزرگتر کنیم باید $\Delta\hat{V}$ را بزرگ کنیم. حال $\Delta\hat{V}$ را چگونه بزرگ کنیم. می‌دانیم $\Delta\hat{V} = -R\Delta l$. Δl که دسـت ما نیسـت ولی می‌توانیم$\mathcal{R}$ را به گونه‌ای تغییر دهیم که در Δl ضرب شده و اثر $\Delta\hat{V}$ را بالا ببرد. می‌توانیم ماتریس‌های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{P}$ را طوری تغییر دهیم که تأثیرش را در ماتریس$\mathcal{R}$ بگذارد و وقتی$\mathcal{R}$ در Δl ضـرب می‌شـود باعث شـود که $\Delta\hat{V}$ بزرگ شود. در حقیقت تغییر در ماتریس آزادی اســت که می‌تواند اعتمادپذیری را بالا ببرد یا پایین بیاورد. در حقیقت شــکل شــبکه و وزن مشاهدات روی ماتریس آزادی اثر می‌گذارند و اثر ماتریس آزادی می‌رود روی $\Delta\hat{V}$ و باعث می‌شود مثلاً آماره رد شـود. حالا در مرحله‌ی بعدی می‌خواهیم راحت‌تر مشاهده‌ی اشتباه را کشف کنیم (مشاهده‌ی اشتباه را از روش باردا کشـــف می‌کنیم). ماتریس آزادی علاوه بر اینکه روی آماره اثر می‌گذارد و باعث می‌شـــود که به راحتی آزمون رد شود، می‌تواند روی ω_i (در روش باردا) نیز اثر بگذارد که بتوانیم راحت‌تر مشاهده‌ی اشتباه را کشف کنیم.

توضیح ۱ : فرض‌های ما در تست فاکتور وریانس ثانویه به صورت زیر بود:

$$\begin{cases} H_0 : \dfrac{df\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = df \\ H_1 : \dfrac{df\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \neq df \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} H_0 : \dfrac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = 1 \\ H_1 : \dfrac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \neq 1 \end{cases}$$

توضیح ۲ :

ما در هر آزمون به دلیل زیر مرتکب خطای نوع اول و دوم می‌شویم:

۱) به دلیل محدودیت در نمونه‌برداری

۲) به دلیل خطا در خود آماره (ممکن است خود آماره‌ای که انتخاب می‌کنیم آماره‌ی خوبی نباشد)

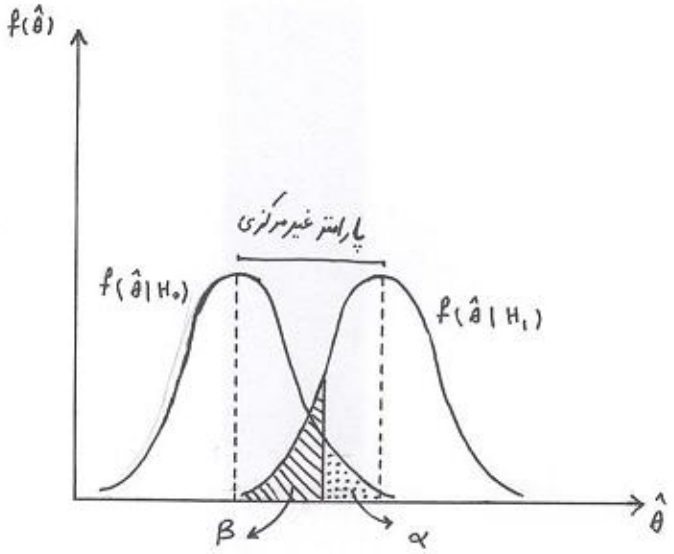
۳) به دلیل درست نبودن فرض $\mathcal{H}_1$

$\alpha = P\{\text{وقوع خطای نوع اول}\} = P\{H_0 \text{ رد } | \text{ درست } H_0\}$

$\beta = P\{\text{وقوع خطای نوع دوم}\} = P\{H_1 \text{ رد } | \text{ درست } = P\{H_0\ H_1\} \text{ قبول } | \text{ غلط } H_0\}$

$\Pi = \text{توان آزمون} = P\{H_0 \text{ رد } | \text{ نادرست } H_0\} \Rightarrow \Pi = 1 - P\{H_0 \text{ قبول } | \text{ نادرست } H_0\} = 1 - \beta$

اگر آماره‌ای مثل $\hat{\theta}$ داشته باشیم که از توزیع نرمال تبعیت می‌کند خطاهای نوع اول و نوع دوم مطابق شکل زیر می‌باشد.



همانطور که گفتیم ماتریس آزادی علاوه بر اینکه روی آماره‌ی ما در تست فاکتور وریانس ثانویه اثر می‌گذارد و باعث می‌شـــود که به راحتی آزمون رد شـــود می‌تواند روی ω_i در روش باردا نیز تأثیر بگذارد که بتوانیم راحت‌تر مشـاهده‌ی اشتباه را کشف کنیم. حال به این مسأله می‌پردازیم. برای ساده‌تر کردن تجزیه و تحلیل مسأله فرض می‌کنیم فقط مشاهده‌ی iام اشتباه باشد:

$$\Delta_i l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Delta l_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta l_i \; l_i \qquad\qquad l_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

تأثیر خطا در مشاهده‌ی iام روی $\hat{V}$ = $\Delta_i \hat{V} = -R\Delta_i l = -\begin{bmatrix} d_1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & d_2 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ r_{n_1} & r_{n_2} & r_{n_3} & \cdots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Delta l_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_i \hat{V}_1 \\ \Delta_i \hat{V}_2 \\ \vdots \\ \Delta_i \hat{V}_n \end{bmatrix}$

میزان تصحیح در مشاهده‌ی iام به ازای خطا در مشاهده iام = $\Delta_i \hat{V}_i = -d_i \Delta l_i$

$\Delta_i \hat{V}_j = -r_{ji}\Delta l_i$ = میزان تصحیح در مشاهده‌ی jام به ازای خطا در مشاهده iام

به وضوح داریم می‌بینیم اگر حتی یک مشاهده‌ی اشتباه هم در لیست مشاهدات ما وجود داشته باشد تأثیرش روی همه‌ی مشاهدات می‌افتد (یکی از بدی‌های روش کمترین مربعات) حالت ایده‌آل برای ما حالتی است که $\mathcal{R}$ قطری باشد در این صورت مشاهده‌ی اشتباه فقط روی تصحیح خودش اثر می‌گذارد و ما راحت‌تر می‌توانیم کشفش کنیم.

بنابراین در اینجا بعد از اینکه تست فاکتور وریانس ثانویه رد شد و فهمیدیم که مشاهده‌ی اشتباهی وجود دارد آن مشاهده‌ی اشتباه را می‌خواهیم راحت‌تر کشف کنیم. مثلاً مشاهده‌ی iام که اشتباه است را می‌خواهیم کشف کنیم. نمی‌خواهیم به ناحق مشاهدات دیگری را رد کنیم. باید $\mathcal{R}$ قطری باشد عملاً قطری کردن $\mathcal{R}$ امکان‌پذیر نیست. نمی‌توانیم جوری با $\mathcal{A}$ و $\mathcal{P}$ بازی کنیم که $\mathcal{R}$ قطری شود. پس در هر صورتی Δl_i روی تصحیح مشاهده‌ی jام هم تأثیر می‌گذارد و ممکن است ما مشاهده‌ی j ام را هم رد کنیم. ولی می‌توانیم کاری کنیم که خطا در مشاهده‌ی iام تأثیرش روی $\Delta_i \hat{V}_i$ نسبت به $\Delta_i \hat{V}_j$ بیشتر شود به این صورت که با تغییر در $\mathcal{A}$ و $\mathcal{P}$ می‌توانیم کاری کنیم که d_i به ۱ نزدیک شود.

* توجه: بهترین حالت این است که $\mathcal{R}$ قطری باشد و تمامی اعداد آزادی برابر ۱ باشد. قطری کردن امکان‌پذیر نیست ولی می‌توانیم کاری کنیم که d_i به ۱ نزدیک شود.

$$\begin{cases} \mu_0 : \omega_i = \dfrac{\hat{V}_i}{\sigma_{\hat{V}_i}} & \text{عدم وجود اشتباه در مشاهده } i\text{ام} \\ \mu_1 : \omega_i = \dfrac{\hat{V}_i + \Delta_i \hat{V}_i}{\sigma_{\hat{V}_i}} = \dfrac{\hat{V}_i}{\sigma_{\hat{V}_i}} + \dfrac{\Delta_i \hat{V}_i}{\sigma_{\hat{V}_i}} & \text{وجود اشتباه در مشاهده } i\text{ام} \end{cases}$$

$$\omega_i \longrightarrow N(0,1)$$

$$\sigma_i = \frac{\Delta_i \hat{V}_i}{\sigma_{\hat{V}_i}}$$

$$\sigma_i = \frac{\Delta_i \hat{V}_i}{\sigma_{\hat{V}_i}}$$

هدف: تعیین کوچکترین خطای قابل کشف در مشاهده iام :

هر چقدر بتوانیم مشاهدات اشتباه کوچکتری را در داخل شبکه کشف کنیم اعتمادپذیری داخلی ما بهتر است.

$$\Delta_i \hat{V}_i = -d_i \Delta l_i$$

$\Delta_i \hat{V}_i$: میزان تصحیح در مشاهده iام به ازای خطا در مشاهده‌ی iام

Δl_i : میزان اشتباه در مشاهده iام

$$R = \Sigma_{\hat{V}} \Sigma_l^{-1} \Rightarrow \Sigma_{\hat{V}} = R\Sigma_l \Rightarrow \sigma_{\hat{V}_i}^2 = d_i \sigma_{l_i}^2 \Rightarrow \sigma_{\hat{V}_i} = \sqrt{d_i}\,\sigma_{l_i}$$

$$\Rightarrow \sigma_i = \frac{-d_i \Delta l_i}{\sqrt{d_i}\,\sigma_{l_i}} = \frac{-\sqrt{d_i}\,\Delta l_i}{\sigma_{l_i}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta_0 l_i = -\frac{\sigma_0 \sigma_{l_i}}{\sqrt{d_i}}}$$

کوچکترین خطای قابل کشف در مشاهده iام (مرز بین خطا و اشتباه)

هر چقدر این مقدار کوچکتر باشد اعتمادپذیری داخلی بالاتر است. اگر مشاهده‌ای خطایش از این بیشتر باشد شبکه‌ی ما آن را به عنوان یک مشاهده‌ی اشتباه در نظر گرفته و کشفش می‌کند یعنی آزمون رد می‌شود و روش باردا به راحتی آن را کشف می‌کند ولی اگر خطای مشاهده‌ای از این مقدار کوچکتر باشد دیگر آن را به عنوان خطا در نظر نگرفته و هیچ کاری نمی‌تواند انجام دهد. (آزمون رد نمی‌شود).

❖ راههای بالا بردن اعتمادپذیری داخلی

- بالا بردن دقت مشاهدات (کم کردن σ_l)

- زیاد کردن عدد آزادی

- بالا بردن درجه آزادی، مثل زیاد کردن تعداد مشاهدات و یا تغییر در تعداد نقاط
- شکل شبکه : تغییر در جای نقاط
- کم کردن وزن مشاهده‌ای که عدد آزادی آن خوب نیست.

۹,۲,۲. اعتمادپذیری خارجی

"تأثیر خطاهای کشف نشده روی نتایج (استحکام شبکه در مقابل خطاهای کشف نشده)"

مدل را مدل پارامتریک غیرخطی در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $W' = 0$ باشد.

اگر خطا کمتر از $\Delta_0 l_i$ بود دیگر کشف نمی‌شود حالا می‌خواهیم ببینیم وقتی این حالت رخ داد چقدر روی نتایج اثر می‌گذارد.

$$\delta\hat{x} = -QA^T PSl$$
$$\Delta_0 \hat{x}_i = -QA^T P\ \Delta_0 l_i\ l_i$$

که در آن $\Delta_0 l_i$ مرز بین خطا و اشتباه است.

از این رابطه تأثیر این امر را می‌بینیم اما با توجه به اینکه $\Delta_0 \hat{x}_i$ برداری می‌باشد تأثیر شکل شبکه و وزن مشاهدات روی نتایج به خوبی دیده نمی‌شود. همچنین $\Delta_0 \hat{x}_i$ وابسته به دیتوم می‌باشد زیرا در داخل ماتریس Q ، ماتریس $\mathcal{D}$ نهفته است که $\Delta_0 \hat{x}_i$ را به دیتوم وابسته می‌کند بنابراین کمیت اسکالری را مانند روبرو تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\lambda_{0i} &= \Delta_0 \hat{x}_i^{\ T} A^T PA\Delta_0 \hat{x}_i \\
&= e_i^T \Delta_0 l_i PA\underbrace{QA^T PAQ}_{Q} A^T P\ \Delta_0 l_i e_i \\
&= \Delta_0 l_i^{\ 2} e_i^{\ T}\ \ P\underbrace{AQA^T P}_{I-R}\ e_i \\
&= \Delta_0 l_i^{\ 2} e_i^{\ T} P(I-R)e_i \\
&= \Delta_0 l_i^{\ 2}\left[e_i^{\ T} Pe_i - e_i^{\ T} PRe_i\right] = \Delta_0 l_i^{\ 2}\left[P_i - P_i d_i\right]
\end{aligned}$$

$e_i^{\ T} Pe_i$: عنصر iام روی قطر اصلی $\mathcal{P}$

$e_i^T PRe_i$: عنصر iام روی قطر اصلی $\mathcal{PR}$

$$= \frac{\Delta_0 l_i^{\ 2}}{\sigma_{l_i}^2}\left[1 - d_i\right]$$

با توجه به اینکه $\Delta_0 l_i = -\dfrac{\sigma_0 \sigma_{l_i}}{\sqrt{d_i}}$

$$\Rightarrow\ \lambda_{0,i} = \frac{\sigma_0^2}{d_i}\left(1 - d_i\right) = \sigma_0^2\left(\frac{1}{d_i} - 1\right)$$

$\lambda_{0,i}$ مستقل از دیتوم است چون فقط در ارتباط با ماتریس آزادی است و ماتریس آزادی مستقل از دیتوم است.

حال برای اینکه تأثیر مشاهدات اشتباه روی نتایج حداقل شود باید d_i به یک نزدیک شود یعنی باید d_i بزرگ شود. اگر d_i صفر شود $\lambda_{0,i}$ بی‌نهایت می‌شود یعنی بیشترین تأثیر را روی نتایج خواهد گذاشت.

بنابراین قابلیت اعتماد خارجی هم به نوعی با d_i در ارتباط است همانطور که قابلیت اعتماد داخلی در ارتباط بود. در هر حالت هر چه d_i بیشتر باشد برای ما بهتر است. از طرف دیگر می‌دانیم که شکل و وزن مشاهدات روی d_i تأثیر می‌گذارد و d_i روی نتایج.

۹,۳. حساسیت *(Sensitivity)* :

حساسیت عبارت است از قابلیت کشف جابجایی در شبکه. وقتی می‌گوییم حساسیت یک شبکه بالاست یعنی جابجایی‌های کوچکتری را می‌تواند کشف کند. فرض کنید بخواهیم بدانیم آیا شبکه طراحی شده در مراحل قبل (بعد از آنکه طراحی مرتبه یک و دو انجام شد) قابلیت کشف جابجایی dx_i و dy_i در نقطه‌ی iام شبکه را دارا هست یا خیر؟

برای این منظور ما یک بردار جابجایی فرضی را به صورت مقابل تشکیل می‌دهیم. در واقع این بردار جابجایی، جابجایی فرضی‌ای است که به شبکه اعمال کرده‌ایم. در این مرحله ما فرض می‌کنیم که بردار جابجایی فوق یک متغیر تصادفی $2P$ بعدی است که P تعداد نقاط شبکه می‌باشد.

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_{x_i} \\ d_{y_i} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ما باید آزمونی آماری انجام دهیم که آیا در شبکه‌ای که نقطه‌ی i به اندازه‌ی dx_i و dy_i جابجا شده باشد آیا این شبکه قابلیت کشف این میزان جابجایی را دارد یا خیر و هرگونه تصمیم‌گیری ما باید براساس یک آزمون آماری باشد.

$$\begin{cases} H_0 : E(d) = 0 & \text{هیچ جابجایی محسوسی در شبکه رخ نداده است.} \\ H_1 : E(d) \neq 0 & \text{جابجایی محسوسی در شبکه رخ داده است.} \end{cases}$$

آماره‌ای که ما برای آزمون انتخاب می‌کنیم باید دو خاصیت زیر را دارا باشد:

۱) آزمون‌مان را بتواند تقریب کند.

۲) تابع توزیع آن آماره برای ما مشخص باشد.

آماره‌ی ما در این آزمون W می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega = \frac{d^T Q_d^+ d}{h\sigma_0^2} \longrightarrow F_{h,\infty} = \chi_h^2$$

$$h = rank(Q_d) = 2P - d$$

$Q_d = Q_{x_2} - Q_{x_1} \longrightarrow$ با فرض استقلال بین x_2, x_1

با فرض اینکه طرح مشـــاهداتی که در اپک اول اســـتفاده کرده‌ایم با طرح مشـــاهداتی که در اپک دوم مورد استفاده قرار می‌دهیم یکسان باشد می‌توانیم نتیجه بگیریم که

Q_d : ماتریس فاکتور جابجایی

$$Q_d = Q_{x_2} + Q_{x_1} = 2Q_x = 2\left(A^T PA\right)^+$$

با قبول احتمال α برای خطای نوع اول می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\begin{cases} \omega > \chi_{h,1-\alpha}^2 & \text{جابجایی محسوسی رخ داده است} \\ \omega < \chi_{h,1-\alpha}^2 & \text{جابجایی محسوسی رخ نداده است} \end{cases}$$

مرحله‌ی بعدی کار ما این است که این شبکه تا چه میزان جابجایی را می‌تواند کشف کند.

پارامتر غیرمرکزی در این آزمون به صورت روبرو می‌باشد:

$$\lambda = \frac{d^T Q_d^+ d}{\sigma_0^2}$$

با قبول α_0 و β_0 می‌توانیم مرزی را برای λ پیدا کنیم به نام λ_0 . λ_0 در واقع حداقل λ ای اســـت که به ما می‌گوید که اگر بیشتر از این مقدار باشد ما می‌توانیم راحت‌تر آزمون را انجام دهیم و اگر کوچکتر از آن باشد آزمون قابل انجام نیست.

ما در اینجا λ_0 را از روی جدول زیر بدست می‌آوریم:

h	۲	۵	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۸۵
λ_0	۹,۶	۱۳,۴	۱۶,۵	۲۱	۲۵,۳	۲۸,۵	۳۲	۴۰

اگر درجه آزادی شـبکه‌ی ما در جدول بالا وجود نداشـته باشـیم که چند جمله‌ای به صورت زیر را به داده‌ها برازش می‌دهیم و از طریق کمترین مربعات ضرایب a_0 و a_1 و a_2 را به دست می‌آوریم.

$$\lambda_0 = f(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2$$

یک فرمول هم جهت تعیین λ_0 ارائه شده است که ما از این فرمول استفاده نمی‌کنیم:

$$\lambda_0 = \chi^2_{h,1-\frac{\alpha_0}{2}} + \chi^2_{h,1-\beta_0} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\alpha_0 = 0.05 \\ \beta_0 = 0.2\end{array}}$$

حال می‌پردازیم به اینکه آیا شبکه‌ی ما قابلیت کشف میزان جابجایی در نظر گرفته شده را دارد.

فرض : $d_0 = c.d$

d : میزان جابجایی در نظر گرفته شده

d_0 : میزان جابجایی که می‌توانیم آن را کشف کنیم.

$$\lambda_0 = \frac{d_0^T Q_d^+ d_0}{\sigma_0^2} = \frac{C_0^2 d^T Q_d^+ d}{\sigma_0^2} \quad \Rightarrow \quad C_0 = \sigma_0 \left(\frac{\lambda_0}{d^T Q_d^+ d} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} if \;\; C_0 > 1 \;\Rightarrow & \text{میزان جابجایی در نظر گرفته شده قابل کشف نیست} \\ if \;\; C_0 \le 1 \;\Rightarrow & \text{میزان جابجایی در نظر گرفته شده قابل کشف است} \\ if \;\; C_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow & \text{به اندازه‌ی نصف جابجایی در نظر گرفته شده جابجایی قابل کشف است} \end{cases}$$

حال اگر $C_0 > 1$ شـد چه کاری باید بکنیم که $C_0 < 1$ بشـود. d که ثابت اسـت پس باید Q_d را تغییر دهیم. Q_d را که بخواهیم تغییر دهیم یا باید $\mathcal{A}$ را تغییر دهیم یا $\mathcal{P}$ را. با توجه به اینکه ماتریس شبکه تأثیر آنچنانی روی دقت مجهولات ندارد و تأثیر بیشتر روی وزن است ما برای حساسیت هم ماتریس وزن را تغییر می‌دهیم. برای اینکه حسـاسیت شبکه را بالاتر ببریم باید ماتریس وزن را تغییر دهیم. $\mathcal{P}$ ای را که می‌گذاریم باید بهتر از حالت قبل باشد. اگر مثلاً در طراحی مرتبه ۲ به این نتیجه رسیده‌ایم که انحراف معیار مشاهدات باید ۳+۲ppm باشـد این بار باید بهتر باشـد مثلاً ۲+۲ppm ما در اینجا طراحی مرتبه ۲ را از دست نمی‌دهیم بلکه آن را بهتر می‌کنیم.

۱۰. شبکه‌های میکروژئودزی:

۱۰,۱. انواع شبکه های میکروژئودزی :

۱. شبکه‌های مطلق: بحث جابجایی مطلق نقاط مطرح است. در اینگونه شبکه‌ها حتماً تعدادی نقطه پایدار (ثابت) می‌بایست وجود داشته باشند.

۲. شبکه‌های نسبی: بحث جابجایی نسبی نقاط مطرح است.

a. جابجایی یکسری نقاط نسبت به نقاط دیگر؛

b. تغییر شکل *(deformation)* .

در شبکه‌های نسبی می‌توانیم نقطه‌ی پایدار نداشته باشیم. نیازی به اینکه نقطه‌ی پایداری وجود داشته باشد نیست.

از بین شبکه‌های مطلق و شبکه‌های نسبی در حالت کلی شبکه‌های نسبی بهتر هستند، چون هیچ اعتباری به اینکه سیستم مختصات در دو اپک زمانی یکسان باشد نیست. تغییر شکل *(deformation)* یک مزیت نسبت به تعیین جابجایی مطلق دارد و آن این است که پارامترهای تغییر شکل (پارامترهای استرین) نسبت به انتقال سیستم مختصات کاملاً ناوردا هستند و مقدار کمی به دوران و مقیاس وابسته هستند.

یکی از دلایلی که چرا تغییر شکل را به جای جابجایی مطلق حساب می‌کنیم این است که پارامترهای استرین نسبت به سیستم مختصات تا حدودی ناوردا هستند و این یک مزیت است چون ممکن است سیستم مختصات در دو اپک یکسان نباشند.

۱۰,۲. روشهای تعیین نقاط پایدار و ناپایدار

- استفاده از می‌نیمم کردن نرم $\mathcal{L}_1$ بردار جابجایی (بررسی نمی‌گردد).

- تست ثبات کلی :

$$\hat{x}_1, Q_{\hat{x}_1}, df_1 , \hat{\sigma}_{0_1}^2 \qquad Q_{\hat{x}_1} = \left(A_1^T P A_1\right)^+$$
$$\hat{x}_2, Q_{\hat{x}_2}, df_2 , \hat{\sigma}_{0_2}^2 \qquad Q_{\hat{x}_2} = \left(A_2^T P A_2\right)^+$$

درجه آزادی در دو اپک را یکسان در نظر می‌گیریم برای اینکه جابجایی مجازی به وجود نیاید.

مقدار اولیه را برای هر دو اپک یکسان در نظر می‌گیریم که سیستم مختصات در دو اپک یکسان باشد.

$$\hat{d} = \hat{x}_2 - \hat{x}_1$$

$$\begin{cases} H_0 : E(\hat{d}) = 0 \\ H_1 : E(\hat{d}) \neq 0 \end{cases}$$

هیچ جابجایی محسوسی رخ نداده است.

جابجایی محسوسی رخ داده است.

$$\omega = \frac{\hat{d}^T Q_{\hat{d}}^{+} \hat{d}}{h \hat{\sigma}_0^2} \longrightarrow F_{h,df}$$

$$df = df_1 + df_2$$

$$Q_{\hat{d}} = Q_{\hat{x}_1} + Q_{\hat{x}_2}$$

با فرض استقلال این $\hat{x}_1$ و $\hat{x}_2$

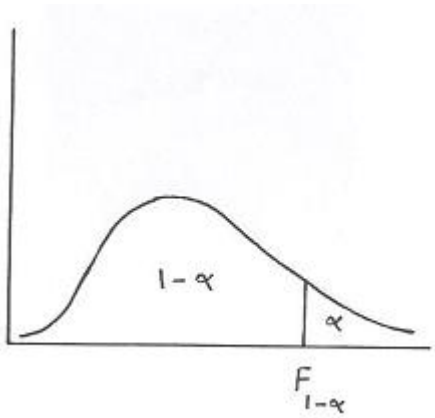
$$h = Rank(Q_{\hat{d}}) = 2p - d$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{df_1 \hat{\sigma}_{0_1}^2 + df_2 \hat{\sigma}_{0_2}^2}{df}$$

با قبول احتمال α برای وقوع خطای نوع اول:

$if \quad \omega > F_{h,df,1-\alpha} \longrightarrow$ قبول $\mathcal{H}_1$ در شبکه جابجایی محسوسی رخ داده است

$if \quad \omega < F_{h,df,1-\alpha} \longrightarrow$ قبول $\mathcal{H}_0$ در شبکه جابجایی محسوسی رخ نداده است



اگر $\mathcal{H}_1$ رد شد یعنی $\mathcal{H}_0$ قبول شد یعنی کل نقاط نقاط پایدار هستند و دیگر سراغ تعیین جابجایی مطلق نمی‌رویم چون همه‌ی نقاط ثابت هستند ولی می‌توانیم سراغ آنالیز *deformation* برویم.

تا اینجا فهمیدیم که جابجایی محسوسی رخ داده است حالا باید بفهمیم کدام نقاط جابجا شده‌اند ولی باید بپردازیم به اینکه چه نقاطی جابجا شده‌اند. اولین کاری که می‌کنیم این است که بیاییم سهم نقاط مختلف را روی آماره ω پیدا کنیم. یعنی جابجایی نقاط مختلف روی آماره ω چه تأثیری گذاشته است.

$$\hat{d}=\begin{bmatrix} d_{\hat{x}1} \\ d_{\hat{y}1} \\ d_{\hat{x}2} \\ d_{\hat{y}2} \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{\hat{x}p} \\ d_{\hat{y}p} \end{bmatrix} \qquad \hat{d}_1=\begin{bmatrix} d_{\hat{x}1} \\ d_{\hat{y}1} \end{bmatrix} \quad \hat{d}_2=\begin{bmatrix} d_{\hat{x}2} \\ d_{\hat{y}2} \end{bmatrix} \quad \vdots \quad \vdots \quad \hat{d}_p=\begin{bmatrix} d_{\hat{x}p} \\ d_{\hat{y}p} \end{bmatrix}$$

$$P=Q_d^{+}=\begin{bmatrix} P_{\hat{d}1} & P_{\hat{d}1\hat{d}2} & \cdots & P_{\hat{d}1\hat{d}p} \\ P_{\hat{d}2\hat{d}1} & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_{\hat{d}p} \end{bmatrix}_{2p\times 2p}$$

ω در آماره i سهم نقطه‌ی $=\Omega_i=\hat{d}_i^T P_{\hat{d}_i}\hat{d}_i$

در این مرحله این نقطه به عنوان اولین نقطه جابجا شده در شبکه انتخاب می‌شود $\Omega_j=\underset{i=1\to p}{Max}(\Omega_i)$

در این مرحله ابتدا تأثیر این نقطه جابجا شده را از روی سیستم مختصات حذف می‌کنیم تا سیستم مختصات در دو اپک تغییر نکرده باشد و جابجایی مجازی نداشته باشیم:

برای این کار از تبدیل S *(S-transformation)* استفاده می‌کنیم:

$$\hat{d}_{new}=S\hat{d}$$
$$Q_{\hat{d}}^{new}=SQ_{\hat{d}}S^T$$
$$S=I-H^T\left(DH^T\right)^{-1}D$$
$$H=Null\left(A^T\right)$$

همان ماتریس $\mathcal{H}$ است با این تفاوت که در آن ستون‌های مربوط به نقطه j (ستون $2j$ و $2j^{-1}$) کلاً خطی هستند : D

بعد این مرحله، حالا از $\hat{d}_{new}$ و $Q_{\hat{d}}^{new}$ سطرها و ستون‌های مربوط به نقطه j حذف می‌شوند و باز دوباره آماره را تشکیل می‌دهیم. در مرحله بعد h می‌شود $h-2$.

نکته: بردار جابجایی ما باید واقعی باشـد. یکی از دلایلی که ممکن اسـت باعث شـود بردار جابجایی مجازی بدست آوریم وجود خطای اتفاقی روی مشاهدات است. خطای اتفاقی روی مشاهدات روی $\hat{x}$ ها اثر می‌گذارد و در نتیجه روی ماتریس وریانس – کوریانس مجهولات بنابراین باید جابجایی‌های ما معنی‌دار باشد. حال این موضـوع را چگونه تسـت کنیم. $Q_{\hat{d}}$ یک ماتریس $2p \times 2p$ می‌باشـد مانند ماتریس وریانس – کوریانس مجهولات و اینجا به جای بیضی خطا، بیضی جابجایی داریم. با استفاده از $Q_{\hat{d}}$ برای هر نقطه بلکه یک بیضی جابجایی در نظر می‌گیریم که این بیضـی جابجایی در حقیقت همان انتشـار خطای اتفاقی است. سپس برای هر نقطه هم از روی $\hat{d}$ آن بردار جابجایی را رسـم می‌کنیم. اگر $\hat{d}_i$ از بیضـی جابجایی نقطه‌ی iام شـبکه بیرون زد نشـان می‌دهد که جابجایی نقطه‌ی iام برای ما معنی‌دار است. بردار جابجایی‌هایمان برای ما معنی‌دار اسـت که از بیضـی بیرون بزند یعنی به خاطر خطای اتفاقی نباشـد (فراتر از خطای اتفاقی اسـت) حداقل یکی از بردارهای جابجایی باید از بیضی جابجایی مربوطه بیرون بزند. اگر اینطور نشود اصلاً سراغ تست ثبات کلی نمی‌رویم.

از طرفی عدم سازگاری بین اپک اول و اپک دوم ممکن است بردار جابجایی ایجاد کند. بنابراین قبل از ورود به مرحله‌ی تست ثبات کلی علاوه بر تست بالا ما یک تست دیگر داریم و آن تست سازگاری بین مشـاهدات اپک اول و اپک دوم است می‌آییم نسبت فاکتور وریانس ثانویه را در اپک تست می‌کنیم. با یک احتمالی باید در بازه‌ی زیر قرار گیرد:

$$F_{df_1,df_2,\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{\sigma}_{02}^{\ 2}}{\hat{\sigma}_{01}^{\ 2}} < F_{df_1,df_2,1-\frac{\alpha}{2}}$$

اگر در بازه قرار نگرفت یک عدم سازگاری رخ داده است.

۱۰,۳. تعیین میزان جابجایی

۱. استفاده از مدل جابجایی (بررسی نمی‌گردد).

۲. استفاده از سرشکنی همزمان اپک اول و اپک دوم :

در این روش پس از کشـف نقاط پایدار و ناپایدار در شـبکه برای نقاط پایدار یک سری مجهول و برای

نقاط ناپایدار دو سری مجهول در نظر می‌گیریم سپس این شبکه را با استفاده از مشاهدات اپک اول و دوم به صورت یکجا و همزمان سرشکن می‌کنیم.

به عنوان مثال در یک شبکه‌ی $\mathcal{P}$ نقطه‌ای $\mathcal{P}_1$ نقطه‌ی پایدار داریم بنابراین

$$P_1 + P_2 = P$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix}_{(2P_1+4P_2)\times 1}$$

$\hat{x}_1$: مختصات نقاط پایدار

$\hat{x}_2$: مختصات نقاط ناپایدار در اپک اول

$\hat{x}_3$: مختصات نقاط ناپایدار در اپک دوم

$$Q_{\hat{x}} = \left(A^T PA\right)^+ = \begin{bmatrix} Q_{\hat{x}1\hat{x}1} & Q_{\hat{x}1\hat{x}2} & Q_{\hat{x}1\hat{x}3} \\ & Q_{\hat{x}2\hat{x}2} & Q_{\hat{x}2\hat{x}3} \\ & & Q_{\hat{x}3\hat{x}3} \end{bmatrix}_{(2P_1+4P_2)\times(2P_1+4P_2)}$$

در اینجا $\hat{x}_1$ و $\hat{x}_2$ مستقل نیستند چون کوفاکتور بین آنها وجود دارد $\longrightarrow$ $\hat{d} = \hat{x}_3 - \hat{x}_2$

$$Q_{\hat{d}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\hat{x}2} & Q_{\hat{x}2\hat{x}3} \\ Q_{\hat{x}2} & Q_{\hat{x}3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= Q_{\hat{x}2} + Q_{\hat{x}3} - Q_{\hat{x}2\hat{x}3} - Q_{\hat{x}3\hat{x}2}$$

تست ثبات کلی با تمام قابلیت‌هایی که دارد یک روش کامل و دقیق نیست. باز هم ممکن است در کشف نقاط پایدار و ناپایدار اشتباه کرده باشد. بنابراین در این مرحله هم باید جابجایی‌ها را تست کنیم که آیا جابجایی‌ها معنی‌دار است یا خیر. دو روش برای چک کردن اینکه جابجایی‌ها معنی‌دار است یا خیر وجود دارد.

روش اول:

$$\hat{d}_i = \begin{bmatrix} \hat{d}_{x_i} \\ \hat{d}_{y_i} \end{bmatrix} \longrightarrow Q_{\hat{d}_i} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{d_{\hat{x}i}} & \sigma_{d_{\hat{x}i} d_{\hat{y}i}} \\ \sigma_{d_{\hat{y}i} d_{\hat{x}i}} & \sigma^2_{d_{\hat{y}i}} \end{bmatrix}$$

$$\omega = \frac{\hat{d}_i^T Q_{d_i}^{-1} \hat{d}_i}{2\sigma_0^2} \longrightarrow F_{2,df}$$

$$h = Rank\left(Q_{\hat{d}_i}\right) = 2$$

$Q_{\hat{d}_i}$ یک ماتریس ۲ × ۲ و مرتبه کامل است بنابراین نیازی به شبه وارون ندارد بنابراین در ω از $Q_{\hat{d}_i}$ وارون

می‌گیریم.

$if \quad \omega > F_{2,df,1-\alpha}$ جابجایی معنی‌دار است

$if \quad \omega < F_{2,df,1-\alpha}$ جابجایی معنی‌دار نیست

روش دوم: $\hat{d}_i$ و $Q_{\hat{d}_i}$ را داریم. به مبدأ نقطه‌ی i بردار جابجایی $\hat{d}_i$ را رسم می‌کنیم. به همین مبدأ از روی $Q_{\hat{d}_i}$ بیضی جابجایی را رسم می‌کنیم. اگر این بردار از بیضی بیرون زد نشان می‌دهد جابجایی معنی‌دار است. اگر بردار داخل بیضی بود نشان می‌دهد جابجایی معنی‌دار نیست.

نکته: این ۲ روش همیشه جواب یکسانی نمی‌دهد.

نکته: مقداری که برای جابجایی محاسبه می‌شود، ممکن است بردار واقعی جابه جایی نباشد، بلکه به دلایل دیگری اتفاق افتد که در این صورت جابجایی واقعی نبوده و مقداری مجازی دارد. عواملی که باعث این امر می‌گردد، عبارتند از :

- تغییر سیستم مختصات در دو وهله زمانی در مشاهدات : برای این که سیستم مختصات در دو وهله مشاهداتی یکسان باشد، باید مقادیر اولیه ای که به مختصات نقاط نسبت داده می‌شود، برای سرشکنی در دو وهله یکسان باشد.
- حتی الامکان مشاهدات از لحاظ تعداد و نوع یکسان باشند.
- وزن مشاهدات یکسان باشد.
- تعداد نقاط نیز در دو وهله یکسان باشد. (مثلا اگر در بعد از اتمام وهله اول، یک نقطه از بین برود، باید وهله اول به غیر از آن نقطه سرشکن شود.)
- دستگاهها، کاملا کالیبره بوده و در سانتراژ، قرائت و . . . دقت شود، زیرا کار شدیدا دچار خطاهای سیستماتیک و اشتباهات است.

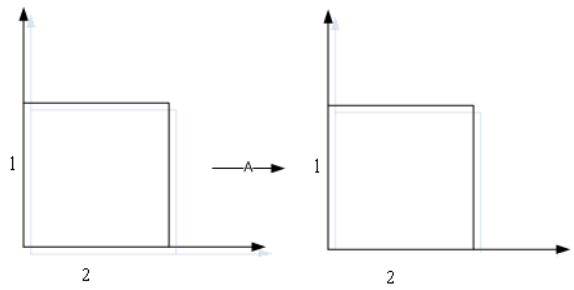
۱۰,۴. آنالیز استرین جزئی:

۱۰,۴,۱. ماتریس های تغییر شکل

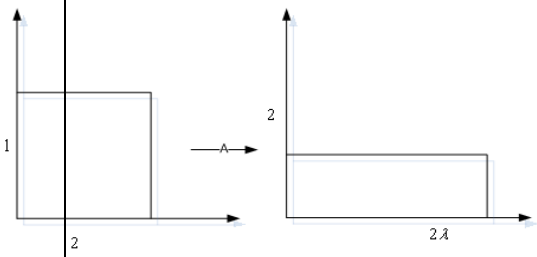
در ابتدا توضیح مختصری راجع به ماتریس های تغییر شکل داده می‌شود:

- ماتریس همانی $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$

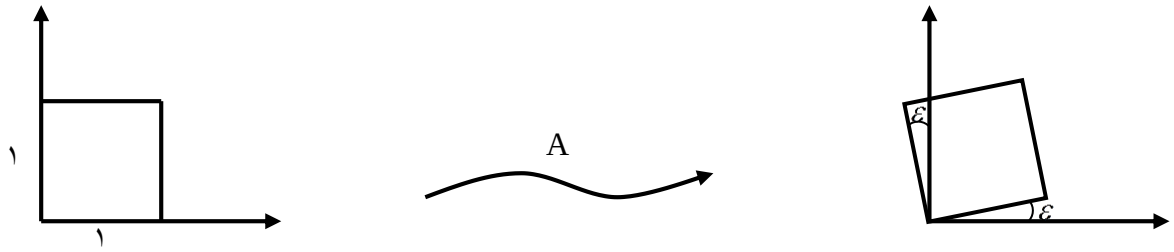
شکل را حفظ می کند.



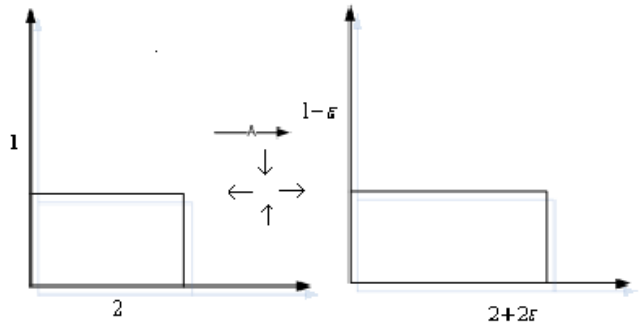
- ماتریس مقیاس $A=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\lambda.I$



- ماتریس دوران $A=\begin{bmatrix}1 & \varepsilon\\ -\varepsilon & 1\end{bmatrix}=I+\begin{bmatrix}0 & \varepsilon\\ -\varepsilon & 0\end{bmatrix}$



- تغییر شکل برش مطلق *(Pure Shear)*

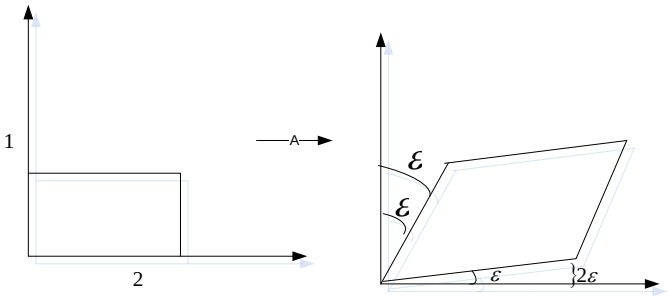


$$A=\begin{bmatrix}1+\varepsilon & 0\\ 0 & 1-\varepsilon\end{bmatrix}=I+\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & -\varepsilon\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\varepsilon>0\Rightarrow\leftarrow\rightarrow\\ \varepsilon<0\Rightarrow\uparrow\downarrow\end{cases}$$

- تغییر شکل برش ساده *(Simple Shear)*

$$A=\begin{bmatrix}1 & \varepsilon\\ \varepsilon & 1\end{bmatrix}=I+\begin{bmatrix}0 & \varepsilon\\ \varepsilon & 0\end{bmatrix}$$



در این تبدیل ابعاد و زاویه شکل تغییر کرده است. زوایا به اندازه 2ε کاهش و افزایش یافته است.

نکته:ماتریس انتقال وجود ندارد، چون مبدا مختصات در هر عددی که ضرب شود، آن را صفر خواهد کرد.

۲,٤,۱۰. تعریف استرین:

" نرخ تغییرات میدان جابجایی نسبت به موقعیت است. "

میـدان جـابجایی یک تابعی اســـت برحســـب موقعیت که میزان جابجایی نقاط را به ما می‌دهد. یک میدان

جابجایی در حقیقت یک مدل جابجایی اســـت که تابعی اســـت از موقعیت. یعنی ما موقعیت نقطه را به آن می‌دهیم و میزان جابجایی را از آن می‌گیریم.

$$d = \begin{bmatrix} \Delta x(x,y) \\ \Delta y(x,y) \end{bmatrix} \qquad r = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(ماتریس استرین) $$E = \frac{\partial(\Delta x, \Delta y)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial d}{\partial r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta x}{\partial x} & \frac{\partial \Delta x}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta y}{\partial x} & \frac{\partial \Delta y}{\partial y} \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{yx} & e_{yy} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ما اگر بتوانیم برای شــبکه خودمان برای نقاط شــبکه ماتریس اســترین را بدســت بیاوریم می‌توانیم چگونگی تغییر شــکل شــبکه در آن محل را تغییر کنیم. این ماتریس 2×2 بیانگر تمامی حرکات و تغییر شــکل‌های یک جسم می‌تواند باشد. استرین یک روش صرفاً هندسی برای بیان *deformation* اجسام است.

نکته: ماتریس استرین لزوماً متقارن نیست.

از ریاضــیات می‌دانیم که هر ماتریس را می‌توانیم به صــورت حاصل جمع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن بنویسیم. به قسمت متقارن ماتریس استرین می‌گویند تنسور استرین. ثابت می‌شود قسمت متقارن یک ماتریس استرین یک تنسور است.

$$E = \frac{1}{2}\left(E + E^T\right) + \frac{1}{2}\left(E - E^T\right) = S + A$$

$$S = \frac{1}{2}\left(E + E^T\right) = \begin{bmatrix} e_{xx} & \frac{e_{xy} + e_{yx}}{2} \\ \frac{e_{xy+yx}}{2} & e_{yy} \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\left(E - E^T\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(e_{xy} - e_{yx}\right) \\ \frac{1}{2}\left(e_{yx} - e_{xy}\right) & 0 \end{bmatrix} \qquad \omega = \frac{1}{2}\left(e_{xy} - e_{yx}\right)$$

قسمت پادمتقارن یک ماتریس استرین (A) بیانگر دوران است واحد این دوران رادیان است.

قسمت متقارن ماتریس استرین را یعنی تنسور استرین را به صورت حاصل جمع سه ماتریس می‌نویسیم.

$$S=\begin{bmatrix}\underbrace{\frac{1}{2}\left(e_{xx}+e_{yy}\right)}_{\sigma} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(e_{xx}+e_{yy}\right)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\underbrace{\frac{1}{2}\left(e_{xx}-e_{yy}\right)}_{\tau} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(e_{yy}-e_{xx}\right)\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}0 & \underbrace{\frac{1}{2}\left(e_{xx}+e_{yx}\right)}_{\gamma}\\ \frac{1}{2}\left(e_{yx}+e_{xy}\right) & 0\end{bmatrix}$$

$\sigma=\frac{1}{2}\left(e_{xx}+e_{yy}\right)$ کشش *dilation* $=\frac{1}{2}\left(\lambda_1+\lambda_2\right)$ *Mean Strain* استرین متوسط

$\tau=\frac{1}{2}\left(e_{xx}-e_{yy}\right)$ برش مطلق *pure shear*

$\nu=\frac{1}{2}\left(e_{xy}+e_{yx}\right)$ برش ساده *simple shear*

$\omega=\frac{1}{2}\left(e_{xy}-e_{yx}\right)$ چرخش *rotation*

$\gamma=\sqrt{\tau^2+\nu^2}$ برش کامل (کل) *total shear*

$\lambda=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$ استرین کل *total strain*

$\lambda_1,\lambda_2\longrightarrow$ مقادیر دایره تنسور استرین

به مقادیر دایره تنسور استرین، استرین‌های اصلی می‌گویند.

مشابه بیضی خطاها، ما بیضی استرین داریم. بیضی استرین را برای قسمت متقارن ماتریس استرین یعنی تنسور استرین تعریف می‌کنیم که نیم قطر اطول و اقصر آن عبارتند از:

$$a=\left|\lambda_1\right|$$
$$b=\left|\lambda_2\right|$$

چرا برای نیم قطر اطول و اقصر بیضی استرین از قدر مطلق مقادیر ویژه استفاده کرده‌ایم؟ چون ممکن است λ_1 و λ_2 منفی هم بشوند. زیرا قسمت متقارن ماتریس استرین که همان تنسور استرین است لزوماً یک

ماتریس $p.d$ (معین مثبت) نیست ممکن است $p.d$ نباشد بنابراین مقادیر ویژه‌ای که بدست می‌آوریم ممکن است منفی هم باشند. بنابراین قدرمطلق اینها را به عنوان a و b در نظر می‌گیریم. مقادیر ویژه‌ی مثبت بیانگر انبساط و مقادیر ویژه منفی بیانگر انقباض است.

متناظر با هر مقدار ویژه‌ای ما بردار ویژه خواهیم داشت که به بردارهای ویژه تنسور استرین می‌گویند راستاهای اصلی. راستاهای اصلی در حقیقت امتدادهایی هستند که در آن امتدادها هیچگونه برشی صورت نگرفته است. بنابراین در راستاهای اصلی ما فقط انبساط و انقباض داریم. هیچ گونه برشی در راستاهای اصلی صورت نگرفته است.

اگر بیضی استرین ما دایره‌ای بشود یعنی در هیچ امتدادی ما برش نداریم. وقتی دایره می‌شود که خارج قطر اصلی صفر و روی قطر اصلی با هم برابر باشد.

۱۰,٤,۳. روشهای تعیین ماتریس استرین:

برای اینکه بتوانیم ماتریس استرین را بدست آوریم اولین کار این است که یک مدل جابجایی داشته باشیم یعنی یک Δx که تابعی باشد از y,x و یک Δy که تابعی باشد از y,x

$$d=\begin{bmatrix}\Delta x(x,y)\\ \Delta y(x,y)\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\Delta x=\Delta x(x,y)=a_0+a_1x+a_2y+a_3xy+a_4x^2+a_5y^2+\dots\\ \Delta y=\Delta y(x,y)=b_0+b_1x+b_2y+b_3xy+\dots\end{cases}$$

تابعی را که در این درس به Δx و Δy برازش می‌دهیم تابع زیر است و این یک تقریب خیلی خوبی از مدل جابجایی ما خواهد بود و نیازی نیست به اینکه از چند جمله‌ای‌های درجات بالاتر استفاده کنیم زیرا جابجایی‌های ما خیلی کوچک است.

$$\begin{cases}\Delta x=a_0+a_1x+a_2y\\ \Delta y=b_0+b_1x+b_2y\end{cases}$$ مدل جابجایی

دو روش برای تعیین ماتریس استرین داریم:

۱- *Finite Difference* برای هر نقطه از شبکه ماتریس استرین بدست می‌آوریم.

۲- *Finite Element* برای هر سه نقطه از شبکه یا به عبارتی برای هر مثلث از شبکه ماتریس استرین بدست می‌آوریم.

Finite Difference :

از دو مدل جابجایی زیر می‌توانیم استفاده کنیم :

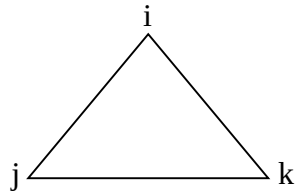
الف) $$\begin{cases} \Delta x_i = a_0 + a_1\left(x_i - x_p\right) + a_2\left(y_i - y_p\right) \\ \Delta y_i = b_0 + b_1\left(x_i - x_p\right) + b_2\left(y_i - y_p\right) \end{cases}$$

ب) $$\begin{cases} \Delta x_i = \Delta x_p + a_1\left(x_i - x_p\right) + a_2\left(y_i - y_p\right) \\ \Delta y_i = \Delta y_p + b_1\left(x_i - x_p\right) + b_2\left(y_i - y_p\right) \end{cases}$$

اما اینجا یک سؤال مطرح است و آن این است که از چه نقاطی از شبکه برای تعیین ماتریس استرین در نقطه‌ی p استفاده کنیم؟ از نقاط اطراف آن استفاده می‌کنیم مثلاً می‌توانیم به مرکز نقطه‌ی p و به یک شعاع خاص یک دایره بزنیم هر نقطه‌ای که داخل آن دایره افتاد به عنوان نقاطی که بایستی در تعیین ماتریس استرین در نقطه p به کار روند استفاده شود. این یک روش است اما روشی که ما استفاده می‌کنیم به صورت زیر می‌باشد. ما نقاطی از شبکه را برای تعیین ماتریس استرین در نقطه‌ی p انتخاب می‌کنیم که توسط مشاهده به نقطه p وصل شده باشند. در معادلات فوق i نقطه‌ای است که توسط مشاهده به نقطه‌ی p وصل شده باشد.

$$E = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

Finite Element



$$\begin{cases} \Delta x_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i \\ \Delta y_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i \\ \\ \Delta x_j = a_0 + a_1 x_j + a_2 y_j \\ \Delta y_j = a_0 + a_1 x_j + a_2 y_j \\ \\ \Delta x_k = a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k \\ \Delta y_k = b_0 + b_1 x_k + b_2 y_k \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} \Delta x_i = a_0 + a_1 (x_i - x_c) + a_2 (y_i - y_c) \\ \Delta y_i = b_0 + b_1 (x_i - x_c) + b_2 (y_i - y_c) \\ \\ \Delta x_j = a_0 + a_1 (x_i - x_c) + a_2 (y_i - y_c) \\ \Delta y_j = b_0 + b_1 (x_j - x_c) + b_2 (y_j - y_c) \\ \\ \Delta x_k = a_0 + a_1 (x_k - x_c) + a_2 (y_k - y_c) \\ \Delta y_k = b_0 + b_1 (x_k - x_c) + b_2 (y_k - y_c) \end{cases}$$

$$E = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

در این روش برای هر مثلث ۳ نقطه داریم بنابراین ۶ تا معادله داریم و ۶ تا مجهول $b_2, b_1, b_0, a_2, a_1, a_0$ بنابراین هیچ درجه آزادی نداریم ولی در روش *Finite Difference* بسته به اینکه چه تعداد نقاطی توسط مشاهده به نقطه‌ی P وصل شده بودند می‌توانستیم از روش کمترین مربعات هم استفاده کنیم.

نکته: مدل جابجایی فوق‌العاده ساده ما که بیان شد بیانگر نمای حرکات یک جسم می‌تواند باشد. یک جسم در حالت کلی حرکات زیر را می‌تواند داشته باشد.

۱) انتقال ۲) دوران ۳) *deformation*

همین مدل به ظاهر ساده همه‌ی این ۳ حرکت را در خود دارد. a_0 و b_0 بیانگر انتقال جسم است b_2, b_1, a_2, a_1 عناصر ماتریس استرین هستند و بیانگر دوران و *deformation* ها می‌باشند.